

17

FONCTIONS VECTORIELLES

I. GÉNÉRALITÉS

CADRE D'ÉTUDE

Le but de ce chapitre est de généraliser les différentes notions abordées sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} aux fonctions d'une **variable réelle** à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Dans toute cette partie, F désignera un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Puisque F est de dimension finie, toutes les normes sur F sont équivalentes. On notera n la dimension de F et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de F .

I désignera systématiquement un intervalle de \mathbb{R} et X une partie non vide de \mathbb{R} .

ESPACE DES FONCTIONS

Proposition 1 (espaces de fonctions)

on note F^X ou $\mathcal{F}(X, F)$ l'ensemble des fonctions définies sur X à valeurs dans F . Cet espace a une structure d'espace vectoriel lorsqu'on le munit des opérations suivantes : si f et g sont dans F^X et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit (possible car F est un \mathbb{K} -espace vectoriel) :

$$f + g : \begin{cases} X & \rightarrow F \\ t & \mapsto f(t) + g(t) \end{cases} \quad \lambda f : \begin{cases} X & \rightarrow F \\ t & \mapsto \lambda \cdot f(t) \end{cases}$$

Lorsque F a une structure d'algèbre (par exemple \mathbb{K} , $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$), on peut définir $f \cdot g$ par $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

APPLICATIONS COMPOSANTES

Soit $f \in F^X$. On définit les n applications coordonnées (ou applications composantes) : pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f_i : \begin{cases} X & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto f_i(x) \end{cases}$ telles que, pour tout $x \in X$, on a $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i$.

LIMITES

On reprend la définition plus générale donnée dans le cadre des espaces vectoriels normés :

Définition 1 (limites)

→ soit $f : X \rightarrow F$, a un point adhérent à X et $\ell \in F$. On dit que f admet ℓ pour limite en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Si la limite existe, elle est unique et notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

→ soit $f : X \rightarrow F$, a un point adhérent à X et $\ell \in F$. On note f_1, \dots, f_n les applications composantes de f et ℓ_1, \dots, ℓ_n les coordonnées de ℓ dans \mathcal{B} . On a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = \ell_i.$$

→ soit $f : X \rightarrow F$ et $\ell \in F$. On suppose que X contient un intervalle du type $[b, +\infty[$. On dit alors que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Si cette limite existe, elle est unique et notée $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

→ soit $f : X \rightarrow F$ et a un point adhérent à $X' = X \cap [a, +\infty[$ et $\ell \in F$. On dit que f admet ℓ pour limite en a à droite si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - a| < \eta \text{ et } x \geq a \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On définit de manière semblable la limite à gauche.

CONTINUITÉ ET CONTINUITÉ PAR MORCEAUX

Définition 2 (continuité)

soit $f : X \rightarrow F$ et $a \in X$. On dit que

→ f est continue en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

→ f est continue sur X lorsque f est continue en tout point $a \in X$.



Comme précédemment, f est continue en a si et seulement si chacune de ses applications composantes est continue en a .

Définition 3 (fonction continue par morceaux)

- Soit $f : [a, b] \rightarrow F$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision du segment $[a, b] : a_0 = a < a_1 < \dots < a_m = b$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admet une limite finie en a_i à droite et en a_{i+1} à gauche.
- Soit $f : I \rightarrow F$. On dit que f est continue par morceaux sur I si pour tout $[a, b] \subset I$, la restriction de f à $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.
- une fonction est continue par morceaux si et seulement si chacune de ses applications coordonnées l'est.

RAPPELS SUR LES FONCTIONS MONOTONES

Cela n'a de sens que lorsque les fonctions sont à valeurs réelles.

Proposition 2 (Bijection et réciproque)

soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. La fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. De plus la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est encore continue, strictement monotone de même sens.

Propriété 3 (monotonie et limite)

soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ croissante (avec $b > a$). La fonction f admet une limite finie ou infinie en b à gauche.

Démonstration : Soit $A = f([a, b[)$.

- cas 1 : A est majorée. Soit $M = \sup A$ (existe car A est non vide, majorée). Alors $\forall x \in [a, b[, f(x) \leq M$. De plus, pour $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A donc il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $f(x_0) \geq M - \varepsilon$. Par croissance de f , on a alors $\forall x \in [x_0, b[, M - \varepsilon \leq f(x) \leq M$. Cela nous donne $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = M$.
- cas 2 : A n'est pas majorée. Alors pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x_0 \in [a, b[$ tel que $f(x_0) > M$ et par croissance de f , $\forall x \in [x_0, b[, f(x) > M$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$.

Une autre façon de traduire le résultat suivant :

Propriété 4 (monotonie et limite)

soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone, alors f admet une limite (finie ou infinie) à droite et à gauche en tout point de I (sauf aux extrémités de I où il n'y a qu'un côté).

II. DÉRIVATION

DÉRIVÉE EN UN POINT

Définition 4 (Dérivée en un point)

- soit $f : I \rightarrow F$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a de dérivée $\ell \in F$ si $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet ℓ pour limite lorsque x tend vers a . Cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée dérivée de f en a . On définit la dérivée à droite ou à gauche en étudiant la limite à droite ou à gauche. Ces éventuelles dérivées sont notées $f'_a(a)$ et $f'_g(a)$.
- si f est dérivable en a , alors f est continue en a
- **composantes** : f est dérivable en a si et seulement si chacune de ses applications coordonnées est dérivable en a (en tant que fonctions à valeurs réelles ou complexes). Dans ce cas, on a $f'(a) = \sum_{i=1}^n f'_i(a) e_i$.
- **fonctions à valeurs complexes** : soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in I$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont (en tant que fonctions de I vers \mathbb{R}) ou si et seulement si \bar{f} l'est. Dans ce cas, on a

$$\operatorname{Re}(f'(a)) = (\operatorname{Re}(f))'(a) \text{ et } \operatorname{Im}(f'(a)) = (\operatorname{Im}(f))'(a).$$

APPLICATIONS DE CLASSE \mathcal{C}^1

Définition 5 (Applications de classe \mathcal{C}^1)

- Soit $f : I \rightarrow F$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $a \in I$. On définit alors l'application dérivée, notée f' , Df ou $\frac{df}{dx}$ sur I par

$$f' : \begin{cases} I & \rightarrow F \\ x & \mapsto f'(x) \end{cases}$$

- On dit que $f : I \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I si f est dérivable en tout point de I et si l'application f' est continue sur I . On note $\mathcal{C}^1(I, F)$ l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^1 de I à valeurs dans F .

**Propriété 5 (Propriétés algébriques)**

soit f et g deux applications de $\mathcal{C}^1(I, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

→ $\mathcal{C}^1(I, F)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

→ $\forall a \in I, (f + \lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$.

→ **composition avec une application linéaire** : si $u \in \mathcal{L}(F, G)$ où G est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, alors $u(f) = u \circ f$ est une application de classe \mathcal{C}^1 de I vers G et pour tout $a \in I, (u \circ f)'(a) = u(f'(a))$.

→ **produit avec une fonction scalaire** : si $\mu : I \rightarrow \mathbb{K}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I , alors $\mu f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et

$$\forall a \in I, (\mu f)'(a) = \mu'(a)f(a) + \mu(a)f'(a).$$

→ **dérivée composée** : soit $g \in \mathcal{C}^1(J, F)$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, avec $f(I) \subset J$ où J est un intervalle de \mathbb{R} . On a $g \circ f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

Démonstration :

→ les deux premiers points se démontrent de façon usuelle et par les propriétés sur les limites.

→ On utilise la linéarité de u : on pose $g = u \circ f$ et on a

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = u\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right).$$

Or $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et F et G sont de dimension finie donc u est continue sur F . Alors par composition des limites, on obtient $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = u(f'(a))$.

→ Démonstration usuelle sur les limites (μ est à valeurs dans \mathbb{K} pour pouvoir multiplier) :

$$\begin{aligned} & \frac{(\mu f)(a+h) - (\mu f)(a)}{h} \\ &= \frac{(\mu(a+h) - \mu(a))f(a+h) + \mu(a)(f(a+h) - f(a))}{h} \\ &= \frac{\mu(a+h) - \mu(a)}{h} f(a+h) + \mu(a) \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

Les opérations sur les limites donnent le résultat.

Proposition 6 (Bilinéarité, multilinéarité)

soit

→ F, G et H des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

→ $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et $g \in \mathcal{C}^1(I, G)$

→ $B : F \times G \rightarrow H$ bilinéaire

$$B(f, g) : \begin{cases} I & \rightarrow & H \\ x & \mapsto & B(f(x), g(x)) \end{cases}$$

est une application de classe \mathcal{C}^1 de I vers H et

$$\forall a \in I, (B(f, g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

On a un résultat similaire pour les applications multilinéaire (on a une somme dans laquelle on a dérivé séparément sur chaque variable)

Démonstration : Elle se réalise comme dans la démonstration précédente avec μf en utilisant la continuité d'une application bilinéaire définie sur des espaces de dimension finie :

$$\begin{aligned} & B(f(a+h), g(a+h)) - B(f(a), g(a)) \\ &= B(f(a+h) - f(a) + f(a), g(a+h)) - B(f(a), g(a)) \\ &= B(f(a+h) - f(a), g(a+h)) + B(f(a), g(a+h)) - B(f(a), g(a)) \\ &= B(f(a+h) - f(a), g(a+h)) + B(f(a), g(a+h) - g(a)) \end{aligned}$$

On divise alors par h , on utilise la linéarité et on fait tendre h vers 0, en utilisant la continuité de B et le théorème de composition de limites.

Exemple (Utilisation du résultat précédent)

→ Soit $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et f et g des applications $\mathcal{C}^1(I, F)$, la fonction $h : t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$h'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

→ Soit $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$. La fonction $h : t \mapsto \|f(t)\|^2$ est de classe \mathcal{C}^1 et

$$h'(t) = 2 \langle f(t), f'(t) \rangle.$$

→ Soit $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3, et f et g des applications de classe $\mathcal{C}^1(I, F)$. La fonction $h : t \mapsto f(t) \wedge g(t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$h'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

Proposition 7 (Caractérisation des applications constantes)

soit $f : I \rightarrow F$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I . La fonction f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur l'intérieur de I .



Démonstration : f est constante si et seulement si chacune des applications coordonnées est constante. On se ramène ainsi au cas d'une fonction à valeurs dans \mathbb{K} .

APPLICATIONS DE CLASSE \mathcal{C}^k

Définition 6 (Applications de classe \mathcal{C}^k)

- On définit les dérivées d'ordre k de $f : I \rightarrow F$ de proche en proche (ou par récurrence). On note $f^{(k)}$ la dérivée de la fonction $f^{(k-1)}$ (lorsque c'est possible).
- Au lieu de $f^{(n)}(a)$, on peut noter $(D^n f)(a)$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}(a)$. De même on peut noter $D^n f$ ou $\frac{d^n f}{dx^n}$ l'application $f^{(n)}$ lorsqu'elle existe.
- On dit qu'une application f est de classe \mathcal{C}^n sur I si f est n fois dérivable sur I et si pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $f^{(k)}$ est continue sur I . On note $\mathcal{C}^n(I, F)$ l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^n sur I .
- On dit qu'une application f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I si f est de classe \mathcal{C}^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^\infty(I, F)$ l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

Propriété 8

opérations

- Les espaces $\mathcal{C}^k(I, F)$ et $\mathcal{C}^\infty(I, F)$ sont des espaces vectoriels.
- $(f + \alpha g)^{(k)} = f^{(k)} + \alpha g^{(k)}$ dans $\mathcal{C}^k(I, F)$.
- f est de classe \mathcal{C}^k sur I si et seulement si chacune de ses applications coordonnées l'est.
- soit $g \in \mathcal{C}^k(J, F)$ et $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$ où J est un intervalle de \mathbb{R} . Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(I, F)$.

FONCTIONS À VALEURS DANS \mathbb{K}

Proposition 9 (cas $F = \mathbb{K}$)

soit $k \leq +\infty$ ($k \in \mathbb{N}$ ou $k = +\infty$).

- On note $\mathcal{C}^k(I) = \mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$.
- L'ensemble $\mathcal{C}^k(I)$ est une algèbre.
- Si f et g sont dans $\mathcal{C}^k(I)$, alors $f \cdot g$ également, et on a la formule de Leibniz :

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

- **fonction réciproque :** soit $f \in \mathcal{C}^1(I, J)$ bijective. Si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 sur J avec, pour tout $y \in J$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Si de plus f est \mathcal{C}^k sur I , alors f^{-1} est également de classe \mathcal{C}^k sur J .

Proposition 10 (Difféomorphisme)

- soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de I sur J si
 - f est une bijection de I sur J .
 - f est de classe \mathcal{C}^k sur I .
 - f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J .
- **Caractérisation des difféomorphismes :** soit I un intervalle de \mathbb{R} , $k \geq 1$ et $f : I \rightarrow J = f(I)$ de classe \mathcal{C}^k . La fonction f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme de I sur $J = f(I)$ si et seulement si f' ne s'annule pas sur I .

FONCTIONS À VALEURS MATRICIELLES

On peut appliquer les résultats précédents au cas des fonctions à valeurs dans les espaces de matrices

**Propriété 11** (Fonctions à valeurs matricielles)

→ Soit $A : I \rightarrow M_{pq}(\mathbb{K})$. On note $A(t) = (a_{ij}(t))$. La fonction A est de classe \mathcal{C}^1 sur I si et seulement si chacune des applications $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, et $A'(t) = (a'_{ij}(t))$.

→ Soit A et B de classe $\mathcal{C}^1(I, M_{pq}(\mathbb{K}))$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $A + \alpha B \in \mathcal{C}^1(I, M_{pq}(\mathbb{K}))$ et

$$\forall t \in I, (A + \alpha B)'(t) = A'(t) + \alpha B'(t).$$

→ Soit $A \in \mathcal{C}^1(I, M_{pq}(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}^1(I, M_{qr}(\mathbb{K}))$, alors $AB \in \mathcal{C}^1(I, M_{pr}(\mathbb{K}))$ et

$$\forall t \in I, (A.B)'(t) = A'(t).B(t) + A(t).B'(t).$$

→ Soit $A \in \mathcal{C}^1(I, M_{pq}(\mathbb{K}))$, alors ${}^t A \in \mathcal{C}^1(I, M_{qp}(\mathbb{K}))$ et

$$\forall t \in I, ({}^t A)'(t) = {}^t A'(t).$$

→ Soit $A \in \mathcal{C}^1(I, M_p(\mathbb{K}))$ telle que, pour tout $t \in I$, $A(t)$ est inversible. Alors

$$A^{-1} : \begin{cases} I & \rightarrow GL_p(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto A^{-1}(t) \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall t \in I, (A^{-1})'(t) = -A^{-1}(t).A'(t).A^{-1}(t).$$

RAPPELS : RÔLE ET ACCROISSEMENTS FINIS**Uniquement le cas réel**

⚡ Cette partie n'est valable que dans le cas d'une fonction à valeurs **réelles**. On désigne par a et b deux réels tels que $b > a$.

Théorème 1 (théorème de Rolle)

soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Proposition 12 (Accroissements finis)

→ **Égalité** : soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

→ **Inégalité** : soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et $M = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. On a $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Remarques :

- L'inégalité se généralise (voir plus loin) pour les fonctions à valeurs vectorielles mais la démonstration fait intervenir les résultats d'intégration.
- Le théorème de Rolle ne se généralise pas : soit

$$f : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto e^{2i\pi t} \end{cases}$$

Alors f est \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et $f(0) = f(1) = 1$. Comme $f'(t) = 2i\pi e^{2i\pi t}$, f' ne s'annule jamais.

III. INTÉGRATION SUR UN SEGMENT**CONSTRUCTION DE L'INTÉGRALE (HORS PROG.)**

La construction de l'intégrale d'une fonction continue ou continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans F se fait suivant le cheminement suivant :

1. On définit d'abord l'ensemble des fonctions en escalier : soit $f : [a, b] \rightarrow F$, on dit que f est en escalier s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$ telle que f est constante sur chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$. On note f_i la constante sur cet intervalle (pour la suite). Cette constante est une constante de F (donc un vecteur). L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un espace vectoriel.
2. On définit pour une telle fonction (même notation qu'au dessus) son intégrale par

$$\int_{[a, b]} f = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{i+1} - a_i) f_i$$

et on montre que cette définition ne dépend pas de la subdivision choisie.

3. On montre les propriétés usuelles pour l'intégrale sur l'espace des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans F :

- Linéarité
- Norme : l'application $\|f\|$ est une fonction en escalier de $[a, b]$ vers \mathbb{R} , et $\left\| \int_{[a, b]} f \right\| \leq \int_{[a, b]} \|f\|$.
- Composition avec une application linéaire : si $\varphi \in \mathcal{L}(F, G)$, alors l'application $\varphi \circ f$ est une fonction escalier de $[a, b]$ vers G et

$$\varphi \left(\int_{[a, b]} f \right) = \int_{[a, b]} \varphi \circ f.$$



4. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors il existe une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Soit (f_n) une telle suite de fonctions en escalier. On montre alors que
- La suite $\int_{[a,b]} f_n$ est convergente (on montre qu'elle est bornée donc dans un compact d'un espace de dimension finie avec une seule valeur d'adhérence)
 - Si on a deux suites de fonctions en escalier (f_n) et (g_n) qui convergent uniformément vers f , alors les suites des intégrales ont même limite :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} g_n \right\| &\leq \int_{[a,b]} \|f_n - g_n\| \\ &\leq (b-a) \|f_n - g_n\|_{\infty, [a,b]}. \end{aligned}$$

Cette dernière norme tend vers 0 car

$$\|f_n - g_n\|_{\infty, [a,b]} \leq \|f_n - f\|_{\infty, [a,b]} + \|f - g_n\|_{\infty, [a,b]}.$$

- On appelle cette limite commune l'intégrale de f sur $[a, b]$ on la note $\int_{[a,b]} f$.

Propriété 13 (propriétés de l'intégrale)

1. Linéarité
2. **Norme** :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|.$$

3. **Composition avec une application linéaire** : si $\varphi \in \mathcal{L}(F, G)$, alors

$$\varphi \left(\int_{[a,b]} f \right) = \int_{[a,b]} \varphi \circ f.$$

4. **Intégration par composantes** : soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ vers F . Si f_1, \dots, f_n sont les applications coordonnées de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de F , alors

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^n \left(\int_{[a,b]} f_i \right) e_i.$$

Autrement dit, il suffit d'intégrer composante par composante.

CONSTRUCTION DE L'INTÉGRALE (VERSION AU PROGRAMME)

Définition 7 (Définition de l'intégrale)

soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ vers F . Si f_1, \dots, f_n sont les applications coordonnées de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de F , alors on pose

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^n \left(\int_{[a,b]} f_i \right) e_i.$$

Autrement dit, il suffit d'intégrer composante par composante.

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on montre également la positivité et la croissance de l'intégrale.

Proposition 14 (Inégalité de la moyenne)

si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors on a

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\| \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|.$$

On appelle valeur moyenne de f le vecteur de F

$$\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f.$$

RELATION DE CHASLES ET EXTENSION DE L'INTÉGRALE

Propriété 15 (Additivité de l'intégrale)

soit $I = [a, b]$ un segment et $c \in]a, b[$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On a

$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f.$$

**Définition 8** (Extension et relation de Chasles)

soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans F . Si a et b sont deux réels de I , alors on définit $\int_a^b f(t) dt$ par

$$\begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } b > a \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } b < a \end{cases}$$

On a alors, pour tout $(a, b, c) \in I^3$,

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt.$$

PRIMITIVES ET INTÉGRALES**Définition 9** (Primitive)

Soit f une application continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans F . On appelle primitive de f sur I toute application g de classe \mathcal{C}^1 sur I à valeurs dans F telle que, $\forall x \in I, g'(x) = f(x)$.

- Soit f une application continue sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans F . On appelle primitive de f sur I toute application g de classe \mathcal{C}^1 sur I à valeurs dans F telle que, $\forall x \in I, g'(x) = f(x)$.
- Soit f une application continue par morceaux sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans F . On appelle primitive de f sur I toute application g **continue** sur I et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur I telle que $g'(x) = f(x)$ en tout point $x \in I$ où f est continue.
- Si g_1 et g_2 sont deux primitives de f sur I alors $g_1 - g_2$ est constante sur I .

Théorème 2 (Théorème fondamental)

soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction

$$F: x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a . De plus, pour toute primitive h de f sur I , on a, pour tout $x \in I$,

$$\int_a^x f(t) dt = h(x) - h(a).$$

Propriété 16

- soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$.
- **intégration par parties** : soit f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ à valeurs réelles ou complexes, on a

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

- **changement de variable (général)** : soit $f \in \mathcal{C}^0(I, F)$ et $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

- **changement de variable (usuel)** : soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et φ une bijection de classe \mathcal{C}^1 de $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

Remarques :

- On peut généraliser cette formule dans F si on dispose d'un produit dans F (exemple sur les espaces de matrices). On peut également la généraliser avec $f: I \rightarrow F$ et $g: I \rightarrow \mathbb{K}$.
- Elle est valable si les fonctions f et g sont continues et \mathcal{C}^1 par morceaux.

Démonstration : Soit G une primitive de f sur I . La première expression vaut

$$G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha)).$$

La dérivée de $\theta = G \circ \varphi$ est $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, et

$$G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha)) = \theta(\beta) - \theta(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \theta'(u) du.$$

ÉTUDE GLOBALE DES FONCTIONS DE CLASSE \mathcal{C}^k **Propriété 17** (Inégalité des accroissements finis)

soit une fonction $f : I \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^1 sur I telle qu'il existe λ tel que $\forall x \in I, \|f'(x)\| \leq \lambda$. Pour tout $(a, b) \in I^2$, on a $\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda|b - a|$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser le corollaire de la partie précédente avec la majoration de la norme de l'intégrale :

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \left| \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \lambda|b - a|.$$

Proposition 18 (prolongement \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^k)

- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans F et de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$. Si f' admet une limite finie l en a , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.
- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et de classe \mathcal{C}^k sur $]a, b[$. Si $f', f'', \dots, f^{(k)}$ admettent une limite finie en a , alors f est de classe \mathcal{C}^k sur $[a, b]$.

FORMULES DE TAYLOR

Proposition 19 (Formules de Taylor)

- **Reste intégral** : soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ à valeurs dans F et \mathcal{C}^{n+1} par morceaux sur $[a, b]$, alors, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(x)}$$

La quantité R_n est appelé « reste intégrale » ou forme intégrale du reste.

- **Taylor-Lagrange** : avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent, si on note M_{n+1} un majorant de $\|f^{(n+1)}\|$ sur $[a, b]$, alors on a, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right\| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

- **développement limité vectoriel** : soit $f : I \rightarrow F$ de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I . La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en tout point de I et pour tout $x_0 \in I$, on peut écrire pour h dans un voisinage de 0 tel que $x_0 + h \in I$, $f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$.

IV. EXERCICES

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Calculer et simplifier $D'_n(x)$ et en déduire une expressions simple de $D_n(x)$.

Exercice 2

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normée de dimension finie, et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], E)$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{x \in [a, b]} \|f'(x)\|.$$