CHAPITRE 17 - FONCTIONS VECTORIELLES

Exercice 17.1

On note $C_1(x),\dots,C_n(x)$ les colonnes de $D_n(x)$. On remarque que $C_i'(x)=C_{i+1}(x)$ si $i\in[\![1\,;n-1]\!]$. On peut alors dériver D_n et obtenir

$$D_n'(x)=\det(C_1'(x),C_2(x),\dots,C_n(x))+\dots+\det(C_1(x),\dots,C_{n-1}'(x),C_n(x))+\det(C_1(x),\dots,C_{n-1}(x),C_n'(x)).$$

Ces déterminants sont tous nuls (deux colonnes identiques) sauf le dernier. En développant par blocs, on a alors $D_n'(x)=D_{n-1}(x)$. On constate également que $D_n(0)=0$. Par récurrence simple, on montre alors que $D_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$.

Exercice 17.2

On note $M=\sup_{x\in[a,b]}\|f'(x)\|$. On a, pour tout $t\in[a,b]$, $f(t)=f(a)+\displaystyle\int_a^t f'(u)\,du=\int_a^t f'(u)\,du$. Cela donne $\|f(t)\|\leqslant\displaystyle\int_a^t\|f'(u)\|\,du\leqslant M(t-a)$. En intégrant entre a et b, on obtient

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|\leqslant M\frac{(b-a)^2}{2}$$

ce qui ne suffit pas. On a cependant

$$\left\|\int_a^{(a+b)/2} f(t)\,dt\right\|\leqslant M\frac{(\frac{a+b}{2}-a)^2}{2}=\frac{(b-a)^2}{8}$$

Le même travail avec $f(t)=f(b)+\displaystyle\int_b^t f'(u)\,du=-\int_t^b f'(u)\,du$ permet d'obtenir

$$\left\|\int_{(a+b)/2}^{b} f(t)\,dt\right\|\leqslant M\frac{(\frac{a+b}{2}-b)^2}{2}=\frac{(b-a)^2}{8}$$

et finalement le résultat en sommant et avec l'inégalité triangulaire.