15 INTÉGRALES À PARAMÈTRE

I. THÉORÈMES

Théorème 1 *(Continuité)*

Soit $h : (x,t) \in A \times I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{K}$. Si

- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- → pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur A,
- → il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, |h(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt$ est continue sur A.

Théorème 2 *(Dérivation)*

Soit $h : (x,t) \in A \times I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{K}$. Si

- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I et intégrale sur I
- → pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A,
- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- → il existe $\psi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$,

alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et, pour tout $x \in A$, $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Théorème 3 *(Limite)*

Soit $h : (x,t) \in A \times I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{K}$ et a adhérent à A (éventuellement $\pm\infty$). Si

- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I,
- → pour tout $t \in I$, $\lim\limits_{x \to a} h(x,t) = g(t)$
- → il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, |h(x,t)| \leqslant \varphi(t)$,

alors $\displaystyle\lim_{x \to a} \int_I h(x,t)\,dt = \int_I g(t)\,dt = \int_I \lim_{x \to a} h(x,t)\,dt$.

Remarque : les propriétés de continuité et dérivabilité étant locale (il suffit de pouvoir le faire au voisinage de chaque point - ou sur chaque segment de A), on sera fréquemment amené à appliquer ces théorèmes sur un domaine $K \subset A$.

Théorème 4 *(Dérivation d'ordre n)*

Soit $h : (x,t) \in A \times I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{K}$. Si

- → pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur A,
- → pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I et intégrale sur I,
- → pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- → il existe $\psi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, t \in I, \left|\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$,

alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur A et, pour tout $x \in A$ et $k \in [\![0; n]\!]$, $F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\,dt$.

Remarque : la domination porte uniquement sur la dernière dérivée. Sur les dérivées précédentes, on a simplement besoin d'une intégrabilité à x fixé. Assez fréquemment, lorsqu'on doit montrer que F est $\mathscr{C}^\infty$, on est toutefois amené à déterminer une telle fonction dominante pour chaque dérivée (afin d'obtenir le résultat par récurrence sur n)

II. EXERCICES

Exercice 1 *(très classique)*

Soient $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer leur dérivée.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Exercice 2

On définit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\,dt$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, calculer f'' et en déduire f.

Exercice 3 *(Mines MP 2011)*

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt}\,dt$. Donner son domaine de définition, calculer sa dérivée et donner une expression simple de f.

Exercice 4 *(Mines MP 2016)*

1. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}}\,dt$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier f en précisant notamment la limite en 0 de $x \mapsto x f(x)$.
3. La fonction f est-elle intégrable sur $]0,1]$? sur $[1,+\infty[$?

Exercice 5

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$ est définie.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression simple pour $f'(x)$.
4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - \pi \ln x\big)$.
5. En déduire une expression simple pour f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On note $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, étudier sa continuité, sa parité et montrer que f est bornée sur son ensemble de définition.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $x f(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$.
3. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'' = f$.
4. En déduire une expression simple pour f.
5. Simplifier $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{x^2+t^2}\,dt$.

Exercice 7 *(Centrale MP 2011)*

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Étudier le domaine de définition de f. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
2. Donner un équivalent de f en 0.
3. Montrer que $x = 1/2$ est axe de symétrie du graphe de f.

Exercice 8 *(Mines MP 2011)*

Soit g continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles telle que $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut ℓ. Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,dt$ tend vers ℓ lorsque x tend vers 0^+.

Exercice 9

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}\,dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f (on utilisera un changement de variable).
4. En déduire une expression simple de f sur $\mathbb{R}$.