CHAPITRE 15 - INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Exercice 15.1

1. On pose $f = F^2$ où $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc f l'est également, avec pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = 2F'(x)F(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.
   Posons $h : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]$. Pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1]$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-(1+t^2)x^2}$. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,1]$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1$ et $t \mapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0,1]$. Donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = -\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,x\,dt$. Le changement affine $u = xt$ donne $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$.
2. D'après les calculs précédents, $f+g$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée nulle. La fonction $f+g$ est donc constante. Or $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x)+g(x) = \frac{\pi}{4}$.
3. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(e^{-t})$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = I^2$. On détermine la limite de g en $+\infty$ par encadrement. Pour $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant \int_0^1 \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}\,dt = \dfrac{\pi}{4}e^{-x^2}$. Par encadrement, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. En conclusion $I^2 = \frac{\pi}{4}$ et puisque $I \geqslant 0$, on obtient $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 15.2

Soit $h(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$.

- → Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et $\dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{(xt)^2}{2t^2} = \dfrac{x^2}{2}$ donc la fonction admet une limite finie en 0. Finalement f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus f est paire.
- → pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$,
- → pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$,
- → pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\sin xt}{t}e^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (arguments proches avec une limite finie x en 0),
- → pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et dominée par $t \mapsto e^{-t}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin xt}{t}e^{-t}\,dt$ et $f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,dt$. Alors

$$f''(x) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t}\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-ix}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Il existe C tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \arctan x + C$. Puisque $f'(0) = 0$, on a $C = 0$. On a enfin, avec $f(0) = 0$,

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \arctan t\,dt = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Exercice 15.5

1. Il faut que x^2+t^2 reste strictement positif. Puisqu'on veut étudier la continuité sur $\mathbb{R}$, on doit considérer l'intégrale sur $]0,+\infty[$. Soit alors $h : (x,t) \mapsto \dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x \neq 0$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $[0,1]$. Pour $x = 0$, la fonction $t \mapsto h(0,t)$ est continue sur $]0,1]$ et $h(0,t) \underset{t\to0}{\sim} 2\ln t$. Dans les deux situations, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,1]$. Enfin, si $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln t}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. On a déjà vérifié les premières hypothèses du théorème de continuité. De plus, pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il est impossible d'obtenir une domination indépendante de x lorsque x parcourt $\mathbb{R}$, car, pour tout $t > 0$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|h(x,t)| = +\infty$. Soit $A > 0$. Pour $t > 0$ et $x \in [-A,A]$, $\ln t^2 \leqslant \ln(x^2+t^2) \leqslant \ln(A^2+t^2)$ (puisque $x^2 \in [0,A^2]$ et que la fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$). Cela permet de majorer $|h(x,t)|$ par $\dfrac{1}{1+t^2}\max(|\ln t^2|, |\ln(A^2+t^2)|)$. On pourrait utiliser cette fonction pour dominer ou, si on veut se débarrasser de la fonction maximum, prendre $\varphi(t) = \dfrac{|\ln t^2| + |\ln(A^2+t^2)|}{1+t^2}$ (le maximum de deux nombres positifs est inférieur à leur somme). On montre facilement que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car, pour tout $t > 0$, on a $\varphi(t) = |h(0,t)| + |h(A,t)|$. Ainsi f est continue sur tout segment $[-A,A]$ avec $A > 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$. Afin de dominer facilement cette quantité, on va majorer $|x|$ (pour majorer facilement le numérateur) et empêcher x de s'approcher de 0 (pour le dénominateur).

Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in[a,b]$ et $t>0$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\dfrac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)}=\psi(t)$. La fonction ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (continue, limite finie en 0 et $\psi(t)=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}(1/t^4)$). Ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, pour tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,dt$. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Afin de calculer cette intégrale, on décompose en éléments simples. Si $x>0$ et $x\neq1$, on a, pour tout $u\in\mathbb{R}^+$,

$$\frac{2x}{(x^2+u)(1+u)}=\frac{2x}{1-x^2}\left(\frac{1}{x^2+u}-\frac{1}{1+u}\right).$$

On rappelle que si $a>0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$. Pour $x>0$ et $x\neq1$, $f'(x)=\dfrac{2x}{1-x^2}\left(\dfrac{\pi}{2x}-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{1+x}$. Par continuité de f' sur $\mathbb{R}_+^*$, cette relation est valable en 1. Donc, pour tout $x>0$, $f'(x)=\frac{\pi}{1+x}$. Lorsque x est grand, on s'attend à ce que le numérateur dans l'intégrale soit proche de $\ln x^2=2\ln x$ et $f(x)$ est donc proche de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2\ln x}{1+t^2}\,dt=\pi\ln x$. On pourrait donc étudier $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\pi\ln(x)$ (et montrer que cette limite est nulle - ce n'est pas trop difficile mais demande un peu de travail). On peut simplement s'intéresser à une valeur particulière, par exemple 0 puisqu'on a montré la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et ainsi $f(0)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)=C$. Alors $f(0)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$. A l'aide d'un changement de variable $u=1/t$, on montrer que cette intégrale est nulle. Finalement, pour tout $x\geqslant0$, $f(x)=\pi\ln(1+x)$ et par parité, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\pi\ln(1+|x|)$ (f n'est donc pas dérivable en 0).

4. Lorsque x est grand, on s'attend à ce que $f(x)$ soit proche de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2)}{1+t^2}\,dt$. Cette dernière intégrale vaut $(\pi/2)\ln x^2=\pi\ln x$. Pour $x>0$, on a

$$f(x)-\pi\ln x=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t^2+x^2)-\ln(x^2)}{1+t^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+t^2/x^2\right)}{1+t^2}\,dt.$$

On effectue le changement linéaire $t=ux$ dans l'intégrale précédente, on obtient, si $x>0$, $f(x)-\pi\ln x=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+u^2)}{1+u^2x^2}x\,du$. Pour tout $u>0$, on a l'encadrement

$$O\leqslant x\frac{\ln(1+u^2)}{1+u^2x^2}\leqslant x\frac{\ln(1+u^2)}{u^2x^2}=\frac{1}{x}\frac{\ln(1+u^2)}{u^2}.$$

La fonction $u\mapsto\dfrac{\ln(1+u^2)}{u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En combinant tout cela, on obtient, lorsque $x>0$, $0\leqslant f(x)-\pi\ln x\leqslant\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+u^2)}{u^2}\,du$. Par encadrement, on aboutit à $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-\pi\ln x\big)=0$.

5. Pour tout $x>0$, on a $f'(x)=\frac{\pi}{1+x}$. Il existe un réel C tel que, pour tout $x>0$, $f(x)=\pi\ln(1+x)+C$. La question précédente donne la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $f(x)-\pi\ln x=C+\pi\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Cela donne $C=0$. Pour tout $x>0$, $f(x)=\pi\ln(1+x)$ et, par parité, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\pi\ln(1+|x|)$.

Exercice 15.6

1. Soit $h(x,t)=\dfrac{\cos(xt)}{1+t^2}$ pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ (on a par conséquent la continuité partielle par rapport à chaque variable) et, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$, $|h(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}$. Puisque $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On obtient facilement $h(-x)=h(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, f est donc paire, ainsi que $|f(x)|\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\cos(xt)|}{1+t^2}\,dt\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$. La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x>0$ et $A>0$. On a $x\displaystyle\int_0^{A}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt=\left[\frac{\sin(xt)}{1+t^2}\right]_0^A+2\int_0^A\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$, car $t\mapsto\sin(xt)$ et $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Puisque $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{\sin(xA)}{1+A^2}=0$, on obtient en faisant tendre A vers $+\infty$, $xf(x)=2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$.

3. On pense bien entendu à appliquer le théorème de dérivabilité. Cependant, il n'aboutira pas si on cherche à l'appliquer sur $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$. En effet $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|=\dfrac{t}{1+t^2}|\sin(xt)|\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{|\sin(xt)|}{t}$ et on peut montrer que $t\mapsto\dfrac{\sin(xt)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème n'a donc aucune chance de s'appliquer ici. On va l'appliquer à la nouvelle intégrale obtenue dans la question précédente. Soit $A=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. On définit g pour x positif par $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$ et, pour $(x,t)\in A$, $h_2(x,t)=\dfrac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$. La fonction h_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A. Pour tout $(x,t)\in A$, $|h_2(x,t)|\leqslant\dfrac{t}{(1+t^2)^2}$, ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, la fonction $t\mapsto h_2(x,t)$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $(x,t)\in A$, on a $\left|\dfrac{\partial h_2}{\partial x}(x,t)\right|=\left|\dfrac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right|\leqslant\dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$. Le théorème de dérivation montre que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $g'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt$. Puisque, pour tout $x>0$, on a $f(x)=\frac{2}{x}g(x)$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, si $x>0$, $f'(x)=\frac{2}{x}g'(x)-\dfrac{2}{x^2}g(x)$. Pour $x\geqslant0$, on a

$$g'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{(t^2+1-1)\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt=f(x)-\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt=f(x)-k(x).$$

On montre comme précédemment que k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x>0$, $k'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,dt = -g(x)$. Alors g' est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g''(x) = f'(x) - k'(x) = f'(x) + g(x)$. Pour $x>0$, on obtient

$$f''(x) = \frac{2}{x}g''(x) - \frac{4}{x^2}g'(x) + \frac{4}{x^3}g(x) = \frac{2}{x}\left(f'(x) + g(x) - \frac{2}{x}g'(x) + \frac{2}{x^2}g(x)\right)$$

et avec l'écriture précédente pour $f'(x)$, il vient $f''(x) = \frac{2}{x}g(x) = f(x)$ si $x>0$.

4. La fonction f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' = y$. Il existe donc des réels A et B tels que, pour tout $x>0$, $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$. La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $A=0$. Par continuité de f en 0, on a $B = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$, et par parité, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$. Cette écriture de f montre que f n'est pas dérivable en 0 puisque les dérivées à droite et à gauche en 0 sont différentes (et opposées).
5. La fonction $t\mapsto \frac{\cos t}{x^2+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ lorsque $x\neq 0$. On peut alors effectuer le changement de variable linéaire $t = ux$ (toujours si $x\neq 0$) pour se ramener à une intégrale proche de celle définissant f. Ainsi, si $x>0$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{x^2+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(ux)}{x^2(1+u^2)}x\,du = \frac{1}{x}f(x) = \frac{\pi e^{-x}}{2x}$$

Par parité, on a $\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{x^2+t^2}\,dt = \frac{\pi e^{-|x|}}{2|x|}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 15.7

1. → Soit $x\in\mathbb{R}$, la fonction $f_x : t\mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On a $f_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ et f_x est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $x>0$. On a $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et f_x est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x<1$. Finalement f est définie sur $]0,1[$.
   → on va prouver la continuité sur un segment $[a,b]\subset 0,1[$. On vérifie les continuités par rapport à chacune des deux variables. Pour la domination, on a $|\frac{1}{t^x(1+t)}| \leqslant \frac{1}{t^a(1+t)}$ si $t\geqslant 1$ et $|\frac{1}{t^x(1+t)}| \leqslant \frac{1}{t^b(1+t)}$ si $t\leqslant 1$. On définit φ par $\varphi(t) = \frac{1}{t^a(1+t)}$ si $t\geqslant 1$ et $\varphi(t) = \frac{1}{t^b(1+t)}$ si $t\leqslant 1$. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (continue, équivalente à $\frac{1}{t^b}$ en 0 et $\frac{1}{t^{a+1}}$ en $+\infty$). la fonction f est donc continue sur tout segment $[a,b]$ de $]0,1[$ donc sur $]0,1[$. Finalement f est définie et continue sur $]0,1[$.
2. Lorsque x tend vers 0, la fonction intégrée se rapproche de $t\mapsto\frac{1}{1+t}$ qui n'est plus intégrable sur $[1,+\infty[$. On découpe l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1\frac{dt}{t^x(1+t)} + \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t)}$$

On vérifie que $g : x\mapsto \int_0^1\frac{dt}{t^x(1+t)}$ est continue sur $[0,1[$ (et même $]-\infty,1[$) avec le théorème de continuité et ainsi sa limite en 0 est $\int_0^1\frac{dt}{1+t} = \ln 2$. Pour la seconde intégrale, on a plusieurs possibilités :
→ on effectue le changement de variable « $t = u^{1/x}$ ». Cela donne

$$h(x) = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\frac{u^{-1+1/x}}{u(1+u^{1/x}}\,dt = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})}\,dt$$

On montre alors avec le théorème sur la limite que $\lim_{x\to0^+}\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2(1+u^{-1/x})}\,dt = \int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2}\,dt = 1$, ce qui donne $h(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x}$.
→ En se disant que la contribution majeure est en $+\infty$, on regarde

$$\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x.t} = -\int_1^{+\infty}\frac{t}{t^{x+1}(1+t)}\,dt.$$

On montre alors (passage à la limite par le théorème correspondant) que $\lim_{x\to0}\int_1^{+\infty}\frac{t}{t^{x+1}(1+t)}\,dt = \int_1^{+\infty}\frac{t}{t(1+t)}\,dt$. Puisque $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x.t} = \frac{1}{x}$, on retrouve $h(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x}$.

Finalement on obtient que $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x}$.

3. On a $f(1-x) = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^{1-x}(1+t)}$. On effectue le changement de variable $u = 1/t$ (l'application $u\mapsto\frac{1}{u}$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même). On a

$$f(1-x) = \int_{+\infty}^0\frac{-du}{u^2(u^{x-1}(1+\frac{1}{u}))} = \int_0^{+\infty}\frac{du}{u^x(u+1)} = f(u).$$

On a bien, pour tout $x\in]0,1[$, $f(1-x) = f(x)$. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 15.8

Notons $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$. On a $\lim_{x\to+\infty} G(x)=\ell$. On effectue une intégration par parties pour faire apparaître G (on a le comportement de G en $+\infty$ mais pas celui de g). On a, pour $A>0$,

$$\int_0^A g(t)e^{-xt}\,dt = \left[G(t)e^{-xt}\right]_0^A + x\int_0^A G(t)e^{-xt}\,dt.$$

Lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt}\,dt = x\int_0^{+\infty} G(t)e^{-xt}\,dt$. Au passage, on a prouvé que f était définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (ce n'est pas explicitement demandé, mais il est raisonnable de se poser la question), puisque la nouvelle intégrale existe (en tant qu'intégrale d'une fonction intégrable puisque $G(t)e^{-xt} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}(e^{-xt})$). On effectue le changement de variable linéaire « $u=xt$ ». L'intégrale devient

$$f(x)=\int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}\,du.$$

Lorsque x tend vers 0^+, on aimerait montrer que $f(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty}\ell e^{-u}\,du=\ell$ (ce qui revient à dire que f est continue en 0). Puisqu'on ne dispose pas d'un théorème de passage à la limite version « continue », on considère une suite quelconque (x_n) de réels strictement positifs qui converge vers 0. On note $f_n(u)=G\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}$. Cette suite de fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}^+$ converge simplement vers $u\mapsto \ell e^{-u}$ (sauf en 0 où la valeur est nulle). Puisque G est continue et admet une limite finie en $+\infty$, on en déduit que G est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Soit M un majorant de $|G|$ sur $\mathbb{R}^+$. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $u\geqslant 0$, $|h_n(u)|\leqslant Me^{-u}$, expression d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de convergence dominée s'applique et donne $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\int_0^{+\infty}\ell e^{-u}\,du=\ell$. Par caractérisation de la continuité par les suites, on en déduit que $\lim_{x\to0^+} f(x)=\ell=f(0)$.

Exercice 15.9

on note $h(x,t)=e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$ pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $t>0$, la fonction $x\mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on a $|h(x,t)|\leqslant e^{-t^2}=\varphi(t)$. La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ et négligeable devant e^{-t} lorsque t tend vers $+\infty$). Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)=-\frac{2x}{t^2}e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$. Une majoration simple de $e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}$ par e^{-t^2} ne permet pas d'aboutir car $t\mapsto \frac{1}{t^2}\exp -t^2$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$. Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$. Pour $x\in[a,b]$ et $t>0$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant \frac{2b}{t^2}e^{-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)}=\psi(t)$. La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\psi(t)\underset{t\to0}{\sim}\frac{2b}{t^2}e^{-\frac{a^2}{t^2}}$, donc $\psi(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures (l'expression est de la forme $u^2e^{-u^2}$ avec u qui tend vers $+\infty$, et la limite est nulle par croissances comparées). Enfin $\psi(t)=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Le théorème de dérivation implique que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*$. Finalement f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec, pour tout $x>0$, $f'(x)=-2\int_0^{+\infty}\frac{x}{t^2}e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}\,dt$.
3. On cherche à relier $f'(x)$ à $f(x)$. Une intégration par parties n'aboutit pas. On cherche un changement de variable. Le seul envisageable est celui qui échange t^2 et x^2/t^2, c'est à dire $u=x/t$ ou $t=x/u$. La fonction $u\mapsto x/u$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, ainsi, si $x>0$,
$$f'(x)=-2\int_{+\infty}^0\frac{u^2}{x}\exp\left(-\left(u^2/x^2+u^2\right)\right)\left(-\frac{x}{u^2}\right)du=-2f(x).$$
4. La fonction f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'+2y=0$. Il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x>0$, $f(x)=Ae^{-2x}$. En utilisant la continuité de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que $f(0)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on trouve $A=f(0)$. Par parité, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|x|}$.