14 SUITES DE FONCTIONS

Dans ce chapitre, toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. CONVERGENCES

Définition 1 *(Convergences)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et f une fonction de A vers $\mathbb{K}$. On dit que

→ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers f sur A lorsque, pour tout $x \in A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, ou encore

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La fonction f est appelée limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

→ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f sur A lorsque, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,A} = 0$, ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La fonction f est appelée limite uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

→ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur les compacts de A lorsque pour tout compact $K \subset A$, (f_n) converge uniformément vers f sur K.

Remarques :

→ la convergence uniforme sur A entraine la convergence simple,
→ notamment la seule fonction vers laquelle la convergence peut être uniforme est la fonction limite simple
→ on a les propriétés de linéarité habituelles (sur les limites simples et uniformes)
→ la convergence uniforme sur les compacts de A n'entraine pas la convergence uniforme sur A

Exercice 1 *(CCP 9)*

1. Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a; +\infty[$?
   (d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 2 *(CCP 13)*

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque. On suppose que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g. Démontrer que la fonction g est bornée.
2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

II. PROPRIÉTÉS

Propriété 1 *(Continuité, limites)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A vers $\mathbb{K}$.

→ **continuité** : si (f_n) converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A (resp. en $a \in A$) alors f est continue sur A (resp. en $a \in A$).

→ **permutation des limites** : si $a \in \overline{A}$, (f_n) converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie $\ell_n \in \mathbb{K}$ en a alors la suite (ℓ_n) converge vers ℓ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Propriété 2 *(Intégration/dérivation)*

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

- → **dérivation** : si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément vers g sur I alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'=g$.
- → **intégration** : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur $[a,b]\subset\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.

Exercice 3

Soit $f_n(x)=\dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ pour $x\in\mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de (f_n).
2. Calculer $\int_0^1 f_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n$. La convergence est-elle uniforme ?
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout $[a,+\infty[$, lorsque $a>0$.

III. Théorème de convergence dominée

Théorème 1 *(convergence dominée)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si

- → **convergence :** la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f,
- → **régularité :** la fonction f est continue par morceaux sur I,
- → **domination :** il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leqslant\varphi$,

alors

- → les fonctions f_n, la fonction f sont intégrables sur I,
- → on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\,dt=\int_I f(t)\,dt$.

Exercice 4

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^n+e^x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{x^{2n}+x^n+1}}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x/n}}{1+x^2}\,dx$

IV. Exercices

Convergences des suites de fonctions

Exercice 5

Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ (convergence simple, uniforme, uniforme sur les compacts) :

a) $f_n(x)=\sin(\frac{x}{n})$
b) $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(\frac{x}{n})$
c) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$
d) $f_n(x)=\dfrac{nx^3}{1+nx^2}$
e) $f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+x^n)}$
f) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^3x^2}$
g) $f_n(x)=\inf(n,x^2/n)$
h) $f_n(x)=nx^2e^{-nx}$
i) $f_n(x)=e^{-x^n}$

Exercice 6

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur les segments $[-A,A]$.
3. Montrer qu'on n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 *(Mines-Ponts MP)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction g_n sur $[0,1]$ par $g_n(t) = e^t(1-t/n)^n$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leqslant \frac{e^t}{n}$ puis que, pour tout $t \in [0,1]$, $\left|e^{-t} - (1-t/n)^n\right| \leqslant \frac{t}{n}$.
2. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où
$$I_n(x) = \int_0^1 t^x(1-\frac{t}{n})^n\,dt.$$
Étudier ensuite la convergence uniforme.

Exercice 8 *(Mines MP 2012)* ✫

1. Soit (K_n) une suite décroissante de fermés de $[a,b]$ d'intersection vide. Montrer qu'il existe n_0 tel que $K_{n_0} = \emptyset$.
2. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur $[a,b]$, convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$. Montrer que la convergence est uniforme (indication : poser $g_n = f - f_n$ et utiliser, pour $\varepsilon > 0$ les ensembles $K_N = \{x \in [a,b], g_N(x) \geqslant \varepsilon\}$).

Exercice 9

Soit (f_n) une suite de fonctions K-lipschitzienne sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ (à valeurs réelles), qui converge simplement vers une fonction f.

1. Montrer que f est également K-lipschitzienne.
2. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 10

Soit P_n une suite de polynômes tous de degré inférieur ou égal à N convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f. En utilisant l'interpolation de Lagrange en $N+1$ points distincts de $[a,b]$, montrer que f est un polynôme de degré au plus N et prouver que la convergence est uniforme.

THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE

Exercice 11 *(Mines MP 2010)*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^{n+1}}$.

1. Déterminer la nature de la suite (a_n).
2. Déterminer un équivalent de a_n.

Exercice 12

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 < (1+1/n)^n < e$.
2. En déduire que, si f est continue et intégrable sur $[1,e[$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{(1+1/n)^n} x^{1/n} f(x)\,dx = \int_1^e f(x)\,dx.$$

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\,dx$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$, puis $L = \lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.
2. On suppose f de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée bornée et telle que $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de $nI_n - L$.

Exercice 14

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-t^n)\,dt$. Déterminer la limite ℓ de I_n, puis un équivalent de $I_n - \ell$.

Exercice 15

Soit $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Montrer que f_n converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$
3. Est-ce vrai sur $\mathbb{R}$, sur tout segment de $\mathbb{R}$?
4. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Exercice 16

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.
3. on rappelle la formule de Wallis : $\int_0^{\pi/2}\sin^p(t)\,dt \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$. En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$