CHAPITRE 14 - SUITES DE FONCTIONS

Exercice 14.3

1. Pour $x=0$, on a $f_n(0)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc $f_n(0)$ converge vers 0. Pour $x\neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n x}{n2^n x^2} = \dfrac{1}{nx}$ d'où convergence simple vers 0. La suite de fonction converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.
2. On a une primitive presque immédiate de f_n :
$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \left[\frac{1}{2n}\ln(1+n2^n x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2n}\ln(1+n2^n).$$
Puisque $n2^n$ est de limite infinie, on a $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n2^n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\ln 2}{2n}$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{\ln 2}{2}$. La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$ sinon, par permutation limite-intégrale, on aurait $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = 0$.
3. On peut bien évidemment étudier la fonction pour obtenir ses variations et obtenir $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[}$. Plus simplement, pour $x\geqslant a$, on majore $0\leqslant f_n(x)\leqslant \dfrac{2^n x}{n2^n x^2} = \dfrac{1}{nx}\leqslant \dfrac{1}{na}$. Cela donne une majoration uniforme de $|f_n|$ sur $[a,+\infty[$ par un terme qui tend vers 0. La convergence est uniforme sur $[a,+\infty[$.

Exercice 14.6

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\sin x$.
2. On étudie la différence (avec $\sin p-\sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\sin\dfrac{p+q}{2}$) :
$$\left|\sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)-\sin x\right| = 2\left|\sin\frac{x}{2n}\sin\left(\frac{2n+1}{2n}x\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2n}\right| \leqslant \frac{|x|}{n}\leqslant\frac{A}{n}$$
On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis ($|\sin a-\sin b|\leqslant 1.|a-b|$). On a donc $\|f_n-f\|_{\infty,[-A,A]}\leqslant\frac{A}{n}$ de limite nulle. La convergence est bien uniforme sur les segments $[-A,A]$ (et donc sur tous les compacts de $\mathbb{R}$ qui sont tous contenus dans un tel segment).
3. On cherche x_n tel que $\|f_n-f\|_\infty\geqslant|f_n(x_n)-f(x_n)$ soit minoré/tend vers autre chose que 0. On a, avec $x_n=n\frac{\pi}{2}$,
$$|f_n(x_n)-f(x_n)| = |\sin((n+1)\frac{\pi}{2})-\sin n\frac{\pi}{2}| = 1.$$

Exercice 14.7

1. On a
$$g_n'(t) = e^t\left((1-\frac{t}{n})^n-\frac{n}{n}(1-\frac{t}{n})^{n-1}\right) = e^t(1-\frac{t}{n})^{n-1}(1-\frac{t}{n}-1) = -\frac{t}{n}e^t(1-\frac{t}{n})^{n-1}.$$
Puisque $t\in[0,1]$, on a facilement $|g_n'(t)|\leqslant\frac{e^t}{n}$. On utilise l'inégalité des accroissements finis sur $[0,t]$. La dérivée g_n' est majorée en valeur absolue sur $[0,t]$ par $\frac{e^t}{n}$, si bien qu'on a $|g_n(0)-g_n(t)|\leqslant t\frac{e^t}{n}$. En multipliant par e^{-t}, on obtient $|e^{-t}-(1-\frac{t}{n})^n|\leqslant\frac{t}{n}$.
2. On commence par l'existence de $I_n(x)$: la fonction $t\mapsto t^x(1-\frac{t}{n})^n$. Cette fonction est continue sur $]0,1]$ et est équivalente en 0 à t^x, intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x>-1$. les fonctions I_n sont définies sur $]-1,+\infty[$. On s'intéresse directement à la différence avec la fonction limite attendue : on note $I(x)=\displaystyle\int_0^1 t^x e^{-t}\,dt$. Pour les mêmes raisons, cette fonction est définie sur $]-1,+\infty[$. Plutôt que de justifier la convergence simple de la suite de fonctions vers I en utilisant le théorème de convergence dominée, on évalue directement la différence (la question précédente permet de l'évaluer facilement) :
$$|I_n(x)-I(x)|\leqslant\int_0^1 t^x\left|(1-\frac{t}{n})^n-e^{-t}\right|dt\leqslant\frac{1}{n}\int_0^1 t^{x+1}\,dt = \frac{1}{n(x+2)}.$$
D'une part, à x fixé, on a bien une différence de limite nulle, d'où la convergence simple de (I_n) vers I sur $]-1,+\infty[$, d'autre part, pour tout $x>-1$, on a également $x+2>1$ d'où $|I_n(x)-I(x)|\leqslant\frac{1}{n}$. On a donc convergence uniforme de (I_n) vers I sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 14.8

1. Chaque K_n est fermé et borné donc compact. Supposons que K_n est non vide pour tout $n\in\mathbb{N}$. Il existe alors $x_n\in K_n\subset[a,b]$. De cette suite, on peut extraire une suite convergente $x_{\varphi(n)}$ de limite $\ell\in[a,b]$. On montre que ℓ est dans tous les compacts donc dans leur intersection. En effet soit $n_0\in\mathbb{N}$. Pour $n\geqslant n_0$, on a $\varphi(n)\geqslant n\geqslant n_0$ et $x_{\varphi(n)}\in K_{\varphi(n)}\subset K_{n_0}$. Puisque K_{n_0} est fermé, la limite de $x_{\varphi(n)}$ est dans K_{n_0} et ce pour tout $n_0\in\mathbb{N}$. Finalement ℓ est dans l'intersection des compacts qui est donc non vide.
2. Soit $g_n=f-f_n$, fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout $x\in[a,b]$, la suite $(g_n(x))$ est décroissante vers 0. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on considère $K_N=\{x\in[a,b], g_N(x)\geqslant\varepsilon\}$. L'ensemble K_N est compact : $K_N=g_N^{-1}([\varepsilon,+\infty[)$ qui est fermé et K_N est borné. La suite K_N est décroissante car g_N est décroissante : on a $g_{N+1}(x)\leqslant g_N(x)$ et si $g_{N+1}(x)\geqslant\varepsilon$ alors $g_N(x)\geqslant\varepsilon$. Enfin l'intersection des K_N est vide. En effet puisque (g_N) converge simplement vers 0 alors, pour tout $x\in[a,b]$, il existe n_0 tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $0\leqslant g_n(x)<\varepsilon$ donc x n'est pas dans tous les K_N. On se retrouve dans la situation de la question 1 et il existe N_0 tel que K_{N_0} est vide, c'est-à-dire que pour tout $x\in[a,b]$, $0\leqslant g_{N_0}(x)\leqslant\varepsilon$ et par décroissante cela reste vrai pour tout $N\geqslant N_0$. Pour $\varepsilon>0$, on a trouvé $N_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $N\geqslant N_0$ et tout $x\in[a,b]$, $|g_N(x)|<\varepsilon$. La convergence de (g_n) vers 0 est uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 14.9

1. Soit $x, y \in [a,b]$. On a $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant K|x-y|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite (simple), on obtient $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$ et f est bien K-lipschitzienne.
2. On va controler la convergence en un nombre fini de points et utiliser le caractère lipschitzien pour les autres. On se donne $\varepsilon > 0$. On fixe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K\frac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{3}$. On note $x_i = a + i\frac{b-a}{N}$. Pour chaque $i \in [\![0;N]\!]$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_i$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$. On note $N' = \max(n_i)$. Pour tous les points x_i de $|a,b]$, si $n \geqslant N'$, on a $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $x \in [a,b]$. Il existe $i \in [\![0;n-1]\!]$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$. On a alors
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \leqslant 2K(x-x_i) + \frac{\varepsilon}{3}.$$
Puisque $|x - x_i| \leqslant |x_{i+1} - x_i| = \frac{b-a}{N}$, on a $K(x-x_i) \leqslant K\frac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{3}$. On obtient finalement $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, et ce, pour tout $x \in [a,b]$. La convergence est donc uniforme.

Exercice 14.10

On fixe $N+1$ points $x_0, x_1, \dots, x_N$ distincts de $[a,b]$ et on considère les polynômes d'interpolation de Lagrange en ces points qu'on note $L_0, L_1, \dots, L_N$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_n = \sum_{i=0}^{N} P_n(x_i)L_i$. Soit $x \in [a,b]$. On a $P_n(x) = \sum_{i=0}^{N} P_n(x_i)L_i(x)$, et $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)L_i(x)$. Ainsi la suite P_n converge simplement vers la fonction $g : x \mapsto \sum_{i=0}^{N} f(x_i)L_i(x)$. Par unicité de la limite $f = g$, ce qui donne f polynomiale de degré au plus N. De plus
$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{N} |f(x_i) - P(x_i)| L_i(x).$$
En notant $\ell_i = \|L_i\|_{\infty,[a,b]}$, on a $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{N} \ell_i |f(x_i) - P(x_i)|$, indépendant de x, si bien que $\|f - P_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \sum_{i=0}^{N} \ell_i |f(x_i) - P(x_i)|$, de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. La convergence est donc uniforme sur $[a,b]$.

Exercice 14.11

1. On note $f_n(t) = \frac{1}{1+t^{n+1}}$. On montre que f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ dès que $n \geqslant 1$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f nulle sur $]1,+\infty[$ et valant $\frac{1}{2}$ en 1. La fonction f est bien continue par morceaux sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 1$, on a $|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = f_1(t)$ et f_1 est intégrable sur $[1,+\infty[$. Le théorème de convergence dominée s'applique et a_n tend vers 0.
2. On effectue le changement de variable « $u = t^{n+1}$ » ou « $t = u^{\frac{1}{n+1}}$ ». Cela donne
$$a_n = \frac{1}{n+1}\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u} u^{\frac{1}{n+1}-1}\, du = \frac{1}{n+1}\int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{n+1}}}{(1+u)u}\, du.$$
Avec le théorème de converge dominée, on montre que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{n+1}}}{(1+u)u}\, du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+u)u}\, du$$
la domination utilisée est par exemple $0 \leqslant u^{\frac{1}{n+1}} \leqslant u^{\frac{1}{2}}$, d'où $0 \leqslant \frac{u^{\frac{1}{n+1}}}{(1+u)u} \leqslant \frac{1}{(1+u)u^{1/2}}$. Puisque la limite est non nulle - on peut même la calculer en décomposant en éléments simples : $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)} = \ln 2$, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$.

Exercice 14.12

1. On utilise la relation $0 < \ln(1+x) < x$ si $x > 0$. Cela donne $0 < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$, puis $0 < n\ln(1+\frac{1}{n}) < 1$, et enfin le résultat par composition avec l'exponentielle.
2. On prolonge l'intégrale sur l'intervalle $[1,e[$: On considère la fonction f_n définie par
$$f_n(x) = \begin{cases} x^{1/n} f(x) & \text{si} \quad x \in [1,(1+1/n)^n] \\ 0 & \text{si} \quad x \in](1+1/n)^n, e[\end{cases}$$
On a alors $\int_1^{(1+1/n)^n} x^{1/n} f(x)\, dx = \int_1^e f_n(x)\, dx$.
   - → On fixe $x \in [1,e[$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $(1+1/n)^n > x$. On a alors, pour $n \geqslant n_0$, $f_n(x) = x^{1/n} f(x)$,de limite $f(x)$ lorsque x tend vers 0. La suite (f_n) converge simplement vers f sur $[1,e[$.
   - → La fonction f est continue sur $[1,e[$.
   - → Pour la domination, on a $|f_n(x)| \leqslant (1+\frac{1}{n})|f(x)| \leqslant 2|f(x)|$ si $x \in [1,(1+1/n)^n]$ et $|f_n(x)| = 0 \leqslant 2|f(x)|$ si $x \in](1+1/n)^n, e[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1,e[$, on a $|f_n(x)| \leqslant 2|f(x)|$. La fonction dominante est intégrable sur $[1,e[$ par hypothèse.

   Le théorème de convergence dominée peut s'appliquer et donne le résultat.

Exercice 14.13

On ne le dira pas à chaque fois mais toutes les fonctions qui apparaissent (fonctions, limites simples, fonctions dominantes) sont continues sur $\mathbb{R}^+$.

1. On note $f_n(x) = f(x)e^{-nx}$. La suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction nulle partout sauf en 0. Si on note M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$, on a, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, $|f_n(x)| \leqslant Me^{-x}$ et $x \mapsto Me^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
   On effectue le changement de variable linéaire « $u = nx$ ». Cela donne
   $$nI_n = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u} \mathrm{d}u.$$
   On note $g_n(u) = f\left(\frac{u}{n}\right) e^{-u}$. On a convergence simple vers $g : x \mapsto f(0)e^{-u}$ et domination par Me^{-u}. On a donc
   $$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^{+\infty} f(0)e^{-u}\mathrm{d}u = f(0).$$
2. On a
   $$nI_n - L = \int_0^{+\infty} \left(f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0)\right) e^{-u}\mathrm{d}u$$
   Pour $u \geqslant 0$ fixé, on a $f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(0)\frac{u}{n}$. On s'attendrait à avoir
   $$nI_n - L \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^{+\infty} f'(0)\frac{u}{n} e^{-u}\mathrm{d}u$$
   On étudie $n(nI_n - L) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(u)\mathrm{d}u$ où $h_n(u) = n\left(f\left(\frac{u}{n}\right) - f(0)\right) e^{-u}$. Pour tout $u \geqslant 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} h_n(u) = uf'(0)e^{-u}$. Pour la domination, on note M_1 un majorant de $|f'|$ sur $\mathbb{R}^+$. Avec l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $u \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|h_n(u)| \leqslant nM_1 \frac{u}{n} e^{-u} = M_1 ue^{-u}$. Puisque $u \mapsto ue^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit le résultat voulu. Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}\mathrm{d}u = 1$, on a
   $$nI_n - f(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} f'(0) \text{ ou encore } I_n = \frac{1}{n} f(0) + \frac{1}{n^2} f'(0) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 14.14

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : t \mapsto \ln(1 - t^n)$ est continue sur $[0, 1[$. On a
$$\ln(1 - t^n) = \ln(1 - t) + \ln(1 + t + \ldots + t^{n-1}) \underset{t\to1}{\sim} \ln(1 - t).$$
La fonction $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$, et, par symétrie, la fonction $t \mapsto \ln(1 - t)$ est intégrable sur $[0, 1[$. On en déduit l'existence de I_n.

→ Pour tout $t \in [0, 1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} \ln(1 - t^n) = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (continue sur $[0, 1[$). Enfin, si $t \in [0, 1[$, on a $0 \leqslant t^n \leqslant t < 1$ et
$$\ln(1 - t) \leqslant \ln(1 - t^n) \leqslant 0.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1[$, on a $|f_n(t)| \leqslant |\ln(1 - t)| = |f_1(t)|$. La fonction f_1 étant intégrable sur $[0, 1[$, le théorème de convergence dominée s'applique et
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

→ On effectue le changement de variable $u = t^n$ dans l'intégrale ($t \mapsto t^n$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0, 1[$ sur lui-même). Cela donne
$$I_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1 - u)}{u} u^{1/n}\, du.$$
On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $g_n : u \mapsto \frac{\ln(1 - u)}{u} u^{1/n}$. On a une domination par $|g_n(u)| \leqslant \left|\frac{\ln(1 - u)}{u} u\right|$, fonction continue et intégable sur $]0, 1[$. On obtient
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\ln(1 - u)}{u} u^{1/n}\, du = \int_0^1 \frac{\ln(1 - u)}{u}\, du = C < 0.$$
Ainsi $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n}$.

Exercice 14.15

1. pour la première inégalité, une étude de fonction suffit (ou alors une formule de Taylor), pour la seconde, idem ou par convexité.

2. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}^+$. On a $[a,b] \subset [0,b]$. Il suffit donc de prouver la convergence uniforme sur $[0,b]$. On a $f_n(x) = \exp\big(n\ln(1+\frac{x}{n})\big)$. On a pour commencer convergence simple vers la fonction exponentielle. On a
$$f_n(x) - e^x = \exp(n\ln(1+\frac{x}{n})) - e^x.$$
On commence par encadrer à x fixé, puis uniformément. On a
$$n\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2}\right) \leqslant n\ln(1+\frac{x}{n}) \leqslant n\frac{x}{n}$$
ce qui donne
$$e^x e^{-\frac{x^2}{2n}} \leqslant f_n(x) \leqslant e^x$$
et enfin
$$e^x\left(e^{-\frac{x^2}{2n}} - 1\right) \leqslant f_n(x) e^x \leqslant 0.$$
Cela donne, à x fixé, $\left|f_n(x) - e^x\right| \leqslant e^x(1-e^{-\frac{x^2}{2n}})$, puis lorsque $x \in [0,b]$,
$$\left|f_n(x) - e^x\right| \leqslant e^b(1-e^{-\frac{b^2}{2n}})$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} e^b(1-e^{-\frac{b^2}{2n}}) = 0$, la convergence est uniforme sur le segment $[0,b]$ donc sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.
3. On se place sur $[-b,b]$ où b est fixé et pour $n \geqslant n_0$ où n_0 est choisi tel que $\frac{b}{n_0} \leqslant \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in [-b,b]$ et $n \geqslant n_0$, on a $\frac{x}{n} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = J$. On doit alors trouver un bon encadrement de $\ln(1+u)$ sur J. Par une étude de fonction, on a $u - u^2 \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$ pour $u \in J$. La fin se fait de la même façon.
4. Soit $g_n(t) = \dfrac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$. La suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $g : t \mapsto e^{-t^2}$ et g est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus $(1+\frac{t^2}{n})^n = 1 + n.\frac{t^2}{n} + \cdots$ où les $\cdots$ sont positifs. On a ainsi $0 \leqslant g_n(t) \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ lorsque $n \geqslant 1$. Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et obtenir le résultat.

Exercice 14.16

1. Le plus simple est de partir de la seconde intégrale et d'effectuer le changement « $\frac{t^2}{n} = \cos^2 x$ » soit « $t = \sqrt{n}\cos x$ ». La fonction $x \mapsto \sqrt{n}\cos x$ est $\mathscr{C}^1$ et bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0,\sqrt{n}]$. On obtient le résultat souhaité.
2. On définit f_n sur $\mathbb{R}^+$ par
$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0,\sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t > \sqrt{n} \end{cases}.$$
   - → Chaque fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   - → Si $t \geqslant 0$, il existe n_0 tel que $t \leqslant \sqrt{n_0}$, et pour $n \geqslant n_0$, $t \leqslant \sqrt{n}$ d'où $f_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t^2}$ (convergence simple).
   - → On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant e^{-t^2}$: c'est vrai si $t > \sqrt{n}$ et également si $t \in [0,\sqrt{n}]$ (avec $\ln(1+u) \leqslant u$). De plus $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   on a donc par le théorème de convergence dominée
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$
3. On a $\sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. À l'aide des deux questions précédentes, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.