13 Réduction (première partie)

I. Élements propres d'un endomorphisme

Propriété 1 *(Élements propres)*

- si $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev, on appelle
  - **valeur propre** de u : tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$,
  - **vecteur propre** de u : tout $x \in E$ *non nul* tel qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$,
  - **espace propre** de u pour λ : le sous-espace $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}$
- on a l'équivalence, pour $x \neq 0$
  - x est un vecteur propre,
  - $(x, u(x))$ est une famille liée,
  - $D = \mathrm{Vect}(x)$ est une droite stable par u
- en dimension finie, on a l'équivalence
  - λ est une valeur propre de u,
  - l'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{Id}$ est non injectif (ou non bijectif),
  - $\det(u - \lambda \mathrm{Id}) = 0$
- si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes :
  - les espaces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe,
  - si x_i est un vecteur non nul de E_{λ_i} pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Proposition 2 *(Sous-espaces vectoriels stables)*

- si u et v commutent alors $\ker v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.
- c'est notamment le cas lorsque v est un polynôme en u : $\ker u$, $\mathrm{Im}\, u$, $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id})$ et $F_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id})^p$ sont stables par u.

Exercice 1 *(TPE MP 2011)*

Soit $f(P) = (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$ si $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer ses éléments propres.

II. Éléments propres d'une matrice

Définition 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$:

- **valeur propre** de A : tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0$, tel que $AX = \lambda X$,
- **vecteur propre** de A : tout $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$ *non nul* tel qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $AX = \lambda X$,
- **espace propre** de A pour λ : le sous-espace $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \{X \in M_{n1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X\}$

Propriété 3 *(Matrices et valeurs propres)*

- si $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors A et ${}^tA$ ont mêmes valeurs propres et $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda({}^tA)$.
- si $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et les espaces propres associés sont de même dimension.

III. Polynôme caractéristique

Propriété 4 *(Polynôme caractéristique)*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

- on note $\chi_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A,
- on a $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A$
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\chi_A(\lambda) = 0$,
- $\dim E_\lambda(A) = n - \mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n)$
- si λ est de multiplicité $k \geqslant 1$ dans χ_A alors $1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant k$
- $\chi_A = \chi_{{}^tA}$
- $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$

Exercice 2 *(Mines MP 2012)*

Soient A, B dans $M_n(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique en fonction de ceux de $A+B$ et $A-B$.

Exercice 3

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie qui commutent. Montrer qu'ils admettent un vecteur propre commun.

IV. Réduction en dimension finie

Les espaces sont de dimension finie.

Diagonalisation

Propriété 5 *(Diagonalisation)*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on a équivalence

- → u est diagonalisable (il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale),
- → il existe une base de E formée de vecteurs propres de u
- → $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$,
- → $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a l'équivalence entre

- → A est diagonalisable (c'est-à-dire A est semblable à une matrice diagonale),
- → il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ de $M_{n1}(\mathbb{K})$ avec $AX_i = \lambda_i X_i$,
- → $M_{n1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A)$,
- → $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$.

Proposition 6 *(Critère de diagonalisabilité avec le polynôme caractéristique)*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = n_\lambda$ où n_λ est la multiplicité de λ dans χ_u.

Remarques :

- → lorsque χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable et chacun des n sous-espaces propres est de dimension 1,
- → lorsque χ_u admet une unique racine λ, alors u est diagonalisable si et seulement si $u = \lambda \mathrm{Id}$.

Trigonalisation

Définition 2 *(Endomorphisme trigonalisable)*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Propriété 7 *(Caractérisations)*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a équivalence

- → u est trigonalisable,
- → le polynôme caractéristique χ_u est scindé,

Exercice 4 *(CCP 73)*

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
3. En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Exercice 5 *(CCP 72)*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.

2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice 6 *(Trigonalisation)*

Soit
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer alors A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ (en fonction de P).

V. EXERCICES

RÉDUCTION MATRICIELLE

Exercice 7

Montrer que la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ suivante est diagonalisable et la réduire, sans calculer son polynôme caractéristique :
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 8 *(Mines MP 2015)*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On note M la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ avec $M_{i,j} = b$ si $i \neq j$et $M_{i,i} = a$.

1. Déterminer les valeurs propres de M. La matrice est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les (a, b) pour lesquels M est inversible. Calculer alors M^{-1}.
3. Déterminer M^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

Soit
$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser J_n dans $M_n(\mathbb{C})$ et en déduire le déterminant de
$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 *(CCP MP 2018)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et p un projecteur.

1. Exprimer $\det(\mathrm{Id}_E + \lambda p)$ en fonction de $\operatorname{rg} p$ et λ.
   On pose $V = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $B = {}^tVV$.
2. Déterminer $\operatorname{rg} B$.
3. Montrer que B est diagonalisable. Calculer ses valeurs propres et la dimension de ses espaces propres.
4. On pose M la matrice avec $m_{ij} = 1 + a_i^2$ si $i = j$ et $m_{ij} = a_i a_j$ sinon. Trouver $\det M$.

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES - CALCULS

Exercice 11 *(sous-espaces stables)*

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quels sont les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par M ?
2. Un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par M admet-il toujours un supplémentaire stable par M ?

Exercice 12

Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et T l'endomorphisme de E qui a f associe F définie par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 13

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et p un projecteur de E de rang r. On considère l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ suivant :

$$\phi : f \mapsto p \circ f + f \circ p.$$

Cet endomorphisme est-il diagonalisable ? Quels sont ses éléments propres ? On pourra travailler dans une base adaptée à p.

Exercice 14 *(produit tensoriel - exemple)*

Soit A une matrice diagonalisable et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice diagonalisable. Montrer que $M = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ est aussi diagonalisable - on cherchera des vecteurs propres sous la forme $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, et φ l'endomorphisme de E défini par

$$P \mapsto (X^2 - 1)P' - 2nXP.$$

Montrer que φ est bien un endomorphisme de E. Déterminer les éléments propres de φ. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 16

Soit $U \in M_n(\mathbb{C})$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ U & 0 \end{pmatrix}$.

1. Relier les sous-espaces propres de V à ceux de U.
2. Donner une CNS sur U pour que V soit diagonalisable

RÉDUCTION D'ENDOMORPHISMES - PLUS THÉORIQUE

Exercice 17 *(Mines MP 2015)*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$.

1. Que dire de u si sa matrice dans toute base est diagonale ?
2. Que dire de u s'il a même matrice dans toute base ?

Exercice 18 *(matrices semblables)*

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ (il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}.B.P$). En écrivant $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$ où P_1 et P_2 sont réelles, montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$(P_1 + \lambda P_2)A = B(P_1 + \lambda P_2).$$

En déduire que A et B sont semblables dans $\mathbb{R}$.

Exercice 19

Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n. On suppose que tout sous-espace stable par u admet un supplémentaire stable par u. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 20 *(Réduction de la comatrice)*

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et B la transposée de la comatrice. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. On envisagera trois cas en fonction du rang de A.

Exercice 21 *(Mines MP 2011)*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g - g \circ f = f$.

1. Calculer $f^k \circ g - g \circ f^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que f est nilpotent (on pourra utiliser l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par $h \mapsto h \circ g - g \circ h$).
2. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.
3. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $f \circ g - g \circ f = \alpha f + \beta g$. Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 22 *(Mines MP 2011)*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = P(A)$.
2. Quelle condition imposer au degré de P pour avoir unicité ?

Exercice 23 *(adhérence des matrices diagonalisables)*

1. Soit P un polynôme réel non nul unitaire de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\text{Im}\, z|^n$.
2. Montrer que $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $M_n(\mathbb{K})$.
3. Soit T_n l'ensemble des matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{R})$, D_n les diagonalisables, Δ_n diagonalisables à valeurs propres distinctes. Montrer que

$$\overline{D_n} = \overline{\Delta_n} = T_n.$$

Exercice 24 *(Mines MP 2017)*

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 2. Exprimer son polynôme caractéristique en fonction de $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(A^2)$.

Exercice 25 *(Mines MP 2013)*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.