CHAPITRE 13 - RÉDUCTION (PREMIÈRE PARTIE)

Exercice 13.1

On vérifie rapidement que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (mais pas de $\mathbb{R}_n[X]$ en général car le degré de $f(P)$ est la plupart du temps strictement supérieur à celui de P). Pour déterminer les éléments propres, on examine l'équation $f(P) = \lambda P$. Si P est de degré exactement n : $P = a_n X^N + \cdots$ avec $a_n \neq 0$. Le terme de degré $n+2$ de $f(P) - \lambda P$ est $na_n - 3a_n = (n-3)a_n$. Il doit être nul donc $n = 3$. Un polynôme propre est donc de degré 3. On prend $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$\begin{aligned} f(P) &= (X^3+X)(3aX^2+2bX+c) - (3X^2-1)(aX^3+bX^2+cX+d) \\ &= (2b-3b)X^4 + (c+3a-3c+a)X^3 + (2b-3d+b)X^2 + (c+c)X + d \\ &= -bX^4 + (4a-2c)X^3 + (3b-3d)X^2 + 2cX + d \end{aligned}$$

On doit alors résoudre $f(P) = \lambda P$. Par unicité de l'écriture d'un polynôme dans la base canonique, on obtient les équations

$$b = 0; 4a - 2c = \lambda a; 3b - 3d = \lambda b; 2cX = \lambda c; d = \lambda d$$

Ce système d'équations est équivalent à $b = d = 0; (4-\lambda)a = 2c; (2-\lambda)c = 0$.

→ si λ ne vaut ni 2, ni 4 alors a et c sont aussi nuls et $P = 0$.
→ si $\lambda = 2$, il reste $a = c$. Le réel 2 est valeur propre et l'espace propre associé est $\text{Vect}(X^3 + X)$.
→ si $\lambda = 4$, alors $c = 0$ et a quelconque. Le réel 4 est valeur propre et l'espace propre associé est $\text{Vect}(X^3)$.

Exercice 13.2

On utilise les opérations par blocs :

$$\begin{aligned} \chi_C(x) &= \begin{vmatrix} xI_n - A & -B \\ -B & xI_n - A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} xI_n - A & -B \\ xI_n - (A+B) & xI_n - (A+B) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} xI_n - (A-B) & -B \\ 0 & xI_n - (A+B) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

en effectuant les opérations par blocs $L_2 \to L_2 + L + 1$ puis $C_1 \to C_1 - C_2$. Le déterminant vaut alors $\det(xI_n - (A+B)).\det(xI_n - (A-B))$, ce qui donne $\chi_C = \chi_{A+B} \cdot \chi_{A-B}$.

Exercice 13.3

Puisque χ_f est scindé (sur $\mathbb{C}$), l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre λ. Considérons $F = E_\lambda(f)$. Cet espace est de dimension au minimum 1 et tout vecteur non nul de F est un vecteur propre de f. On montre que g admet un vecteur propre dans F : puisque f et g commutent, F est stable par g. L'endomorphisme induit g_F est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $\dim F \geqslant 1$, donc admet une valeur propre μ. Soit x un vecteur propre associé, il vérifie $g_F(x) = g(x) = \mu x$ mais également $f(x) = \lambda x$ puisque $x \in F$. Ainsi f et g ont un vecteur propre en commun.

Exercice 13.4

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\text{Sp}A = \{-2, 3\}$ et $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\right)$.
2. On effectue le produit avec une matrice quelconque $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Après calcul, on obtient $ND = DN$ si et seulement si $b = c = 0$, soit N est diagonale.
3. Pour déterminer les matrices qui commutent avec A, on effectue la travail « en changeant de base »- on utilise la même relation de similitude : on a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On a $AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D$ $\Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec D, c'est-à-dire, $AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$. L'espace des matrices commutant avec A est donc
$$C(A) = \left\{ P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} \text{ avec } (a,d) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
Pour justifier que $C(A) = \text{Vect}(I_2, A)$, on a au moins deux possibilités :
→ on effectue les calculs (bof)
→ on remarque que $\text{Vect}(I_2, A)$ est contenu dans $C(A)$ et que les deux sous-espaces vectoriels ont même dimension.

Exercice 13.5

1. On regarde la dimension de l'espace engendré par l'image de la base e : si $v = 0$ alors le rang de f est nul, sinon il vaut 1.
2. Lorsque $v = 0$, f est nulle donc diagonalisable. Sinon $\text{rg} f = 1$ et $\dim \ker f = n-1$. Ainsi 0 est valeur propre de f d'ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique au moins $n-1$. On en déduit alors que
$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, P_f(X) = X^{n-1}(X - \lambda).$$
En examinant le coefficient de degré $n-1$, on a $\text{tr} f = \lambda$, si bien que $P_f = X^{n-1}(X - \text{tr} f)$. On discute suivant cette trace :

- → si $\operatorname{tr} f \neq 0$, alors c'est une seconde valeur propre ; elle est de multiplicité 1 donc l'espace propre associé est de dimension 1. La somme des dimensions des espaces propres vaut n et f est diagonalisable.
- → si $\operatorname{tr} f = 0$, alors $P_f = X^n$. La valeur propre 0 est de multiplicité n et l'espace propre associé est de dimension $n-1$. L'endomorphisme n'est pas diagonalisable.

Exercice 13.9

1. Par un simple développement par rapport à la première colonne, on trouve $\chi_{J_n} = X^n - 1$. Ce polynôme caractéristique est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. La matrice est diagonalisable avec n valeurs propres simples qui sont les racines n-ièmes de l'unité. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Il existe P inversible telle que $J_n = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$.
2. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à J_n. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, alors $f(e_i) = e_{i-1}$ avec la convention $e_k = e_{n-k}$ si $k \leqslant 0$. On en déduit que J_n^k est une matrice du même type avec la diagonale de 1 qui se déplace, jusqu'à $J_n^n = I_n$. On en déduit que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^k = Q(J_n)$ où $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Puisque $J_n = PDP^{-1}$, on a $J_n^k = PD^kP^{-1}$ ainsi que $A = Q(J_n) = PQ(D)P^{-1}$. On en déduit que
$$\det A = \det Q(D) = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k).$$

Exercice 13.10

1. Il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de p est diagonale $\begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r} \end{pmatrix}$. La matrice de $\mathrm{Id}_E + \lambda p$ dans cette base est alors $\begin{pmatrix} (1+\lambda) I_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $(1+\lambda)^r$.
2. Si V est nul, alors $\operatorname{rg} B = 0$, sinon la matrice B a toutes ses colonnes proportionelles et $\operatorname{rg} B = 1$.
3. La matrice B est symétrique réelle donc diagonalisable. On peut le faire sans utiliser cela. Le réel 0 est valeur propre avec un sous-espace propre de dimension $n-1$. La multiplicité de la racine est donc au moins $n-1$ et $\chi_B = X^{n-1}(X-\alpha)$. En développant, on trouve que $\alpha = \operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$. Finalement B admet deux valeurs propres, 0 avec un espace propre de dimension $n-1$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ avec un espace propre de dimension 1. La matrice B est diagonalisable
4. On note $\alpha = \operatorname{tr} B = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$. On remarque que $M = I_n + B$. On peut s'inspirer de la première question pour obtenir un déterminant $1+\alpha$. On peut aussi remarquer que $B/\alpha = C$ est la matrice d'un projecteur de rang 1. Ainsi $M = I + \alpha C$ et on retrouve le déterminant directement avec la question 1.

Exercice 13.11

1. on discute suivant la dimension du sous-espace stable :
   - → les seuls espaces stables de dimension 0 et 3 sont respectivement $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$.
   - → les sous-espaces stables de dimension 1 sont les droites dirigées par un vecteur propre. On détermine les espaces propres de M. On trouve une seule valeur propre réelle qui est 1 et un espace propre associé qui est la droite dirigée par $(1,1,1)$. Cette droite est donc la seule droite stable par M.
   - → Un plan d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable si et seulement si le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$. La matrice a les mêmes valeurs propres que A. L'espace propre associé est $\operatorname{Vect}((1,0,1))$. Ainsi le seul plan stable est le plan d'équation $x + z = 0$.
2. C'est le cas ici car la droite propre et le plan stable sont supplémentaires (le vecteur $(1,1,1)$ n'est pas dans le plan).

Exercice 13.12

1.
   - → on justifie que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit H une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$ (f est continue sur $\mathbb{R}^+$). Pour tout $x > 0$, $F(x) = \dfrac{H(x) - H(0)}{x - 0}$ donc F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \to 0} F(x) = H'(0) = f(0)$. Ainsi F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et T est bien une application de E dans E.
   - → on prouve la linéarité : soient f et g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $T(f + \lambda g)(0) = (f + \lambda g)(0) = (Tf + \lambda Tg)(0)$. Si $x > 0$, alors on a également, par linéarité de l'intégrale, $T(f + \lambda g)(x) = (Tf + \lambda Tg)(x)$. Finalement $T(f + \lambda g) = Tf + \lambda Tg$ est T est un endomorphisme de E.
2. Soit λ une valeur propre de T et $f \neq 0$ telle que $Tf = \lambda f$. On a $f(0) = \lambda f(0)$ et, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$. La première relation donne $\lambda = 1$ ou $f(0) = 0$. On s'intéresse à la seconde. La fonction Tf est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ donc λf également.
   - → si $\lambda = 0$, alors pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc, pour tout $x > 0$, $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et en dérivant f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité. Le réel $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.
   - → si $\lambda \neq 0$, en divisant par λ, on obtient que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors, pour tout $x > 0$,
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda x f(x).$$

On peut dériver et obtenir, pour tout $x>0$, $f(x)=\lambda f(x)+\lambda x f'(x)$ et ainsi f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$xy'+(1-\frac{1}{\lambda})y=0$$

On résout cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$: il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x>0$, $f(x)=A\exp\left(-(1-\frac{1}{\lambda})\ln x\right)=Ax^{\frac{1}{\lambda}-1}$. On veut que f soir continue sur $\mathbb{R}_+$ ce qui impose $\frac{1}{\lambda}-1\geqslant 0$ soit $0<\lambda\leqslant 1$. Réciproquement ces fonctions conviennent.

Bilan : les valeurs propres de T sont les réels dans $]0,1]$ et pour $\lambda\in]0,1]$, l'espace propre associé est $\mathrm{Vect}(f_\lambda)$ où $f_\lambda(x)=x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Exercice 13.13

On cherche à résoudre l'équation $p\circ f+f\circ p=\lambda f$. Ce n'est pas immédiat sous cette forme (mais faisable). On voit mieux ce qu'il se passe matriciellement. On choisit une base $\mathscr{B}$ de E adaptée au projecteur p : on a $P=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, et $F=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ (avec les tailles correspondantes). On écrit la relation $FP+PF=\lambda F$. On obtient

$$\begin{pmatrix}2A & B\\ C & 0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix}(2-\lambda)A & (1-\lambda)B\\ (1-\lambda)C & -\lambda D\end{pmatrix}=0.$$

Si λ est différent de $0,1$ et 2, alors $F=0$.

- cas $\lambda=0$: on a $A=B=C=0$ et D quelconque. On en déduit que E_0 est de dimension $(n-r)^2$, constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$.
- cas $\lambda=1$: on trouve que E_1 est de dimension $2r(n-r)$, constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix}0 & B\\ C & 0\end{pmatrix}$.
- cas $\lambda=2$: on trouve que E_2 est de dimension r^2, constitué par les endomorphismes dont la matrice F est $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

La somme des dimensions des espaces propres et $(r+n-r)^2=n^2$. L'application est diagonalisable.

Exercice 13.14

On note $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, ainsi que $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$ une base de vecteurs propres pour B, associés aux valeurs propres α et β. On note enfin $(Y_1,\dots,Y_n)$ une base de vecteurs propres pour A associés aux valeurs propres $\mu_1,\dots,\mu_n$. On cherche un vecteur propre pour A sous la forme conseillée :

$$M.\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aAX_1+bAX_2\\ cAX_1+dAX_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}.$$

On se doute qu'on va créer des vecteurs propres en utilisant les vecteurs propres de A. Si on essaie avec $X_1=X_2=Y_i$, on obtient

$$M.\begin{pmatrix}Y_i\\ Y_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a+b)\mu_i Y_i\\ (c+d)\mu_i Y_i\end{pmatrix},$$

mais ce vecteur n'est pas, en général, colinéaire à $\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_1\end{pmatrix}$ (c'est pire si on choisit $X_1=Y_i$ et $X_2=Y_j$ avec $i\neq j$. On change légèrement ce vecteur en le cherchant sous la forme $\begin{pmatrix}k_1 Y_1\\ k_2 Y_1\end{pmatrix}$. On obtient

$$M.\begin{pmatrix}k_1 Y_i\\ k_2 Y_i\end{pmatrix}=\mu_i\begin{pmatrix}(ak_1+bk_2)Y_i\\ (ck_1+dk_2)Y_i\end{pmatrix},$$

et dire que ce vecteur est propre revient à dire que $\begin{pmatrix}ak_1+bk_2\\ ck_1+dk_2\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}$, donc que ce dernier vecteur est un vecteur propre de B. On va alors considérer les n vecteurs $\begin{pmatrix}x_1 Y_i\\ y_1 Y_i\end{pmatrix}$, propres pour M pour la valeur propre $\alpha\mu_i$) et les n vecteurs $\begin{pmatrix}x_2 Y_i\\ y_2 Y_i\end{pmatrix}$, propres pour M pour la valeur propre $\beta\mu_i$. Il reste à montrer que ces $2n$ vecteurs sont linéairement indépendants pour obtenir une base de vecteurs propres de M. On effectue une combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\begin{pmatrix}x_1 Y_i\\ y_1 Y_i\end{pmatrix}+d_i\begin{pmatrix}x_2 Y_i\\ y_2 Y_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}(c_i x_1+d_i x_2)Y_i\\ \sum_{i=1}^{n}(c_i y_1+d_i y_2)Y_i\end{pmatrix}=0.$$

Par indépendance de la famille $(Y_1,\dots,Y_n)$, on obtient les $2n$ équations $c_i x_1+d_i x_2=0$ et $c_i y_1+d_i y_2=0$ pour $i\in[\![1\,;n]\!]$, c'est-à-dire les n systèmes

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_i\\ d_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

La matrice étant inversible (base de vecteurs propres pour B), les scalaires c_i et d_i sont nuls. Cela termine la démonstration.

Exercice 13.15

- → On montre facilement que φ est un endomorphisme de E (la seule petite difficulté est de justifier que les éventuels termes de degré $2n+1$ disparaissent).
- → On pourrait écrire la matrice de l'endomorphisme dans la base canonique, mais cela ne donne rien de bien intéressant. Soit P un polynôme non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$. on va considérer cette relation comme une équation différentielle sur $]1,+\infty[$ (on peut identifier polynôme et fonction polynôme sur un tel intervalle - la résolution de l'équation différentielle se fait facilement sur un intervalle sur lequel (x^2-1) ne s'annule pas, et on choisit $]1,+\infty[$ pour que $x-1$ et $x+1$ soient positifs. Ainsi $\varphi(P) = \lambda P$ si, et seulement si,

$$\forall x \in]1,+\infty[, (x^2-1)P'(x) = (2nx+\lambda)P(x).$$

On décompose la fraction rationnelle :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \frac{2nx+\lambda}{x^2-1} = \frac{n+\lambda/2}{x-1} + \frac{n-\lambda/2}{x+1}.$$

Cela donne, pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$P(x) = C\exp\left((n+\frac{\lambda}{2})(x-1)+(n-\frac{\lambda}{2})(x+1)\right) = C(x-1)^{n+\lambda/2}(x+1)^{n-\lambda/2}.$$

On n'obtient pas forcément un polynôme. C'est le cas lorsque $n \pm \frac{\lambda}{2}$ sont deux entiers. Puisque la somme des deux exposants vaut $2n$, il suffit que l'un soit un entier entre 0 et $2n$ pour que l'autre le soit également. Supposons que $\lambda/2 = p \in [\![-n\,;n]\!]$. On a $\lambda_p = 2p$ qui est valeur propre avec des polynômes propres associés $P = C(X-1)^{n+p}(X+1)^{n-p}$. On obtient ainsi $2n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, avec pour chacune un espace propre de dimension 1. Puisque E est de dimension $2n+1$, on en déduit que φ est diagonalisable, possède $2n+1$ valeurs propres simples et chaque espace propre est de dimension 1.

Exercice 13.16

1. Soit $x = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur propre de V pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela revient à $V.x = \lambda x$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y &=& \lambda X \\ UX &=& \lambda Y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} Y &=& \lambda X \\ UX &=& \lambda^2 X \end{array}\right.$$

Pour que λ soit valeur propre de V, il faut que λ^2 soit valeur propre de U, de plus si X est vecteur propre de U pour λ^2, alors le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour V. Réciproquement soit μ une valeur propre de U pour le vecteur propre de X. Si λ est une racine carrée de μ, on pose $x = \begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix}$. On a alors

$$Vx = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ U & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \lambda X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X \\ \lambda^2 X \end{pmatrix} = \lambda x.$$

On a en fait prouvé que l'applications

$$\left\{\begin{array}{ccc} E_\delta(V) & \to & E_{\delta^2}(U) \\ \begin{pmatrix} X \\ \delta X \end{pmatrix} & \mapsto & X \end{array}\right.$$

est un isomorphisme.

2. → Chaque vecteur propre de U pour une valeur propre λ non nulle (on note δ tel que $\delta^2 = \lambda$) donne un vecteur propre pour V pour la valeur propre δ, à savoir $\begin{pmatrix} X \\ \delta X \end{pmatrix}$ et un pour la valeur propre $-\delta$, $\begin{pmatrix} X \\ -\delta X \end{pmatrix}$. Supposons que U soit diagonalisable et inversible (0 n'est pas valeur propre de U). Considérons une base de vecteurs propres de U, $(X_1,\dots,X_n)$ associée aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda^2$. On note δ_i une racine de λ_i. On va montrer que la famille

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \delta_1 X_1 \end{pmatrix},\dots\begin{pmatrix} X_n \\ \delta_n X_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} X_1 \\ -\delta_1 X_1 \end{pmatrix},\dots\begin{pmatrix} X_n \\ -\delta_n X_n \end{pmatrix},$$

est une base de $M_{2n}(\mathbb{C})$. Considérons une combinaison linéaire de ces vecteurs, avec des coefficients $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$. La relation donne

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_1X_1+\ldots+a_nX_n & + & b_1X_1+\ldots+b_nX_n & = & 0 \\ a_1\delta_1X_1+\ldots+a_n\delta_nX_n & - & (b_1\delta_1X_1+\ldots+b_n\delta_nX_n) & = & 0. \end{array}\right.$$

La première équation donne $(a_1+b_1)X_1+\ldots+(a_n+b_n)X_n = 0$ et la seconde $\delta_1(a_1-b_1)X_1+\ldots+\delta_n(a_n-b_n)X_n = 0$. L'indépendance linéaire de la famille de vecteurs propres, et le fait que $\delta_i \neq 0$ donnent les équations $a_i+b_i = 0 = a_i-b_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$. On en déduit que toutes les constantes sont nulles. On a donc obtenu une base de vecteurs propres et V est diagonalisable.

→ Si U est diagonalisable et non inversible. L'étude précédente nous indique qu'il n'y a pas d'autres sous-espaces propres que ceux trouvés en première question. Chaque espace propre de U donne deux espaces propres pour V de même dimension, sauf pour la valeur propre 0 où on obtient un seul sous-espace. La somme des dimensions est alors $2n-\dim E_0(U) < 2n$ et V n'est pas diagonalisable.

Exercice 13.17

1. Si x est non nul, on le complète en une base de $\mathbb{C}^n$. La matrice de u dans cette base est diagonale donc x est vecteur propre de u. Un exercice déjà fait montrer alors que u est une homothétie.

2. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et A la matrice de u dans cette base. Si P est inversible alors $P^{-1}AP = A$ donc $AP = PA$ pour toute matrice P inversible. Par densité de $GL_n(\mathbb{C})$ et continuité de $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$, on a, pour toute matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$, $AB = BA$. La matrice A commute avec toutes les matrices donc A est scalaire (voir autre exercice).

Exercice 13.18

On a $(P_1 + \mathrm{i}P_2)A = B(P_1 + \mathrm{i}P_2)$, ce qui donne en séparant les coefficients réels et imaginaires purs $P_1A = BP_1$ ainsi que $P_2A = BP_2$. On en déduit que $(P_1 + \lambda P_2)A = B(P_1 + \lambda P_2)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Il reste à trouver λ de sorte que la matrice $P_\lambda = P_1 + \lambda P_2$ est inversible. Considérons $f : \lambda \mapsto \det(P_1 + \lambda P_2)$. Cette fonction est polynomiale de degrté au plus n, et n'est pas identiquement nulle puisque $f(\mathrm{i}) \neq 0$. Elle admet un nombre fini de racines si bien qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) \neq 0$. Pour cette valeur, on a $P_\lambda \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A = P_\lambda^{-1}.B.P_\lambda$.

Exercice 13.19

Soit F la somme directe de tous les sous-espaces propres de u. On doit montrer que $F = E$. Supposons que cela n'est pas le cas. Ce sous-espace est stable par u, il admet donc un supplémentaire G stable par u de dimension au moins 1. L'endomorphisme induit u_G admet alors une valeur propre (G est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) et un vecteur propre associé x. Ainsi u admet un vecteur propre en dehors de F, ce qui est une contradiction avec la définition de F.

Exercice 13.20

- → rg $A = n$: la matrice A est inversible est $AB = BA = \det(A)I_n$. Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $\lambda \neq 0$ (A est inversible donc 0 n'est pas valeur prorpe). On a alors $BAX = \lambda BX$, ce qui donne $BX = \dfrac{\det A}{\lambda}X$, si bien que X est vecteur propre de B.
- → rg $A \leqslant n-2$: la matrice B est nulle, donc tous les vecteurs non nuls sont propres pour B.
- → rg $A = n-1$. On a montré que rg $B = 1$. Si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ non nulle. On a $AX = \lambda X$ et $BAX = 0 = \lambda BX$. Puisque $\lambda \neq 0$, on en déduit que $BX = 0$ et X est un vecteur propre pour B (pour la valeur propre nulle). Il reste le cas de la valeur propre nulle pour A. Puisque rg $A = n-1$, on a $\dim\ker A = 1$. On considère $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. On a $ABX = 0$, ce qui signifie que $BX \in \ker A$. Puisque $\dim\ker A = 1$ et $X \in \ker A$ non nul tout vecteur de $\ker A$ est colinéaire à X, notamment BX est colinéaire à X, ce qui signifie que X est vecteur propre de B.

Exercice 13.21

1. On montre par récurrence que $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$. Considérons l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E) : h \mapsto h \circ g - g \circ h$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(f^k) = kf^k$. Si f^k n'est jamais nul alors k est valeur propre de φ pour tout entier ce qui est impossible (infinité de valeurs propres). Il existe donc k tel que $f^k = 0$.
2. C'est un peu plus compliqué... Supposons que x est un vecteur propre commun à f et g : $f(x) = \lambda x$ et $g(x) = \mu x$. On a alors $f(g(x)) = \lambda\mu x$ et $g(f(x)) = \lambda\mu x$. Cela donne $(f \circ g - g \circ f)(x) = 0 = f(x)$. Donc x est un vecteur propre pour f pour la valeur propre 0. On va justifier que g admet un vecteur propre dans $\ker f$. Soit $F = \ker f$: F est de dimension non nulle car f est nilpotente donc non inversible et F est stable par f. On montre que F est stable par g : si $f(x) = 0$, alors $f(x) = 0 = (f \circ g - g \circ f)(x) = f(g(x)) - g(f(x)) = f(g(x))$ donc $g(x) \in \ker f$. On peut donc considérer les endomorphismes induits par f et g sur F. Alors $\tilde{g}$ est un endomorphisme de F de dimension au moins 1 donc $\tilde{g}$ admet au moins une valeur propre complexe et un vecteur propre x dans F. Ce vecteur est automatiquement vecteur propre pour f.
3. On va se ramener au cas précédent. On pose $\tilde{f} = f + kg$, donc $f = \tilde{f} - kg$. On a (on retire les $\circ$)
$$\tilde{f}g - g\tilde{f} = (fg - gf) = \alpha f + \beta g = \alpha\tilde{f} + (\beta - k\alpha)g$$
On suppose pour commencer que $\alpha \neq 0$ et on choisit $k = \dfrac{\beta}{\alpha}$. On a alors $\tilde{f}g - g\tilde{f} = \alpha\tilde{f}$. On note $\tilde{g} = \dfrac{1}{\alpha}g$, ce qui nous ramène à l'équation $\tilde{f}\tilde{g} - \tilde{g}\tilde{f} = \tilde{f}$. Alors il existe un vecteur propre commun aux deux endomorphismes : $\tilde{f}(x) = ax$ et $\tilde{g}(x) = bx$. En revenant à f et g, on obtient assez facilement que x est un vecteur commun à f et g.
Lorsque $\alpha = 0$, l'équation de départ est alors $fg - gf = \beta g$. Si $\beta = 0$, alors f et g commutent et ont un vecteur propre commun (voir un autre exercice classique). Sinon, on pose $\tilde{f} = -\dfrac{1}{\beta}f$ pour se ramener à $g\tilde{f} - \tilde{f}g = g$ et ainsi au problème précédent (en permutant le rôle de f et g).

Exercice 13.22

Notons f et g les endomorphismes canoniquement associés à A et B. Les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autres. Puisque χ_A est scindé à racines simples, A et f sont diagonalisables et chaque espace propre est de dimension 1. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (2 à 2 distinctes) de f et $e_1, \dots, e_n$ une base de vecteurs propres associée. L'espace propre $E_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ est stable par g, ce qui signifie que $g(e_i)$ est colinéaire à e_i. La base est aussi une base de vecteurs propres pour g : les deux endomorphismes sont simultanément diagonalisables. En revenant aux matrices, il existe une matrice inversible Q telle que $A = QDQ^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$ où D est diagonale de diagonale $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et Δ diagonale de diagonale $\mu_1, \dots, \mu_n$. Dire que $B = P(A)$ revient à dire que $\Delta = P(D)$, ce qui se ramène aux conditions $\mu_i = P(\lambda_i)$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. Puisque les valeurs λ_i sont deux à deux distinctes, les polynômes d'interpolation de Lagrange permettent d'obtenir une solution - avec unicité sur P si on lui impose un degré inférieur ou égal à $n-1$.

Exercice 13.23

1. Si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors on peut le factoriser en $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$ avec $a_k \in \mathbb{R}$. Alors, pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}\, z$) on a $|P(z)| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left|a - a_k + ib\right| \geqslant |b|^n = |\mathrm{Im}\, z|^n$. Réciproquement, P est scindé dans $\mathbb{C}$. Si z est une racine de P alors $P(z) = 0$ d'où $|\mathrm{Im}\, z|^n \leqslant |P(z)| = 0$ si bien que z est un réel. Toutes les racines de P sont réelles.

2. Soit

$$\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ M & \mapsto & \chi_M \end{array} \right.$$

Il suffit de regarder le coefficient de degré k de χ_M (on regarde les composantes dans une base de l'espace d'arrivée) : c'est un polynôme en tous les coefficients de la matrice M donc chacune des applications composantes est continue. Ainsi χ est continue.

3. On a $\Delta_n \subset D_n \subset T_n$. Cela donne $\overline{\Delta_n} \subset \overline{D_n} \subset \overline{T_n}$. On va montrer que $\overline{T_n} = T_n$ et $\overline{\Delta_n} = T_n$. Pour la seconde égalité : soit $M \in T_n$. Il existe Q telle que $M = QTQ^{-1}$. Si on note J la matrice diagonale $\operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$ alors pour λ assez petit, la matrice $T + \lambda J$ a tous ses éléments diagonaux 2 à 2 distincts et est triangulaire supérieure. Elle est donc diagonalisable. La suite $Q(T + \frac{1}{p}J)Q^{-1}$ converge vers T et les termes sont dans Δ_n à partir d'un certain indice n_0. Il reste à montrer que T_n est fermé. Soit (M_p) une suite de matrices de T_n qui converge vers M. Chaque matrice M_p est triagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ ce qui équivaut à dire que χ_{M_p} est scindé sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\chi_{M_p}(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^n$. Par continuité de l'application χ, on en déduit, en passant à la limite sur p (à z fixé) : pour tout $z \in C$, $|\chi_M(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^n$. Ainsi χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ et M est dans T_n.

Exercice 13.24

La matrice est trigonalisable. Puisque son rang est 2, l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension $n-2$ et A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale $\alpha, \beta, 0, \ldots, 0$. On a alors

$$\chi_A = X^{n-2}(X-\alpha)(X-\beta) = X^{n-2}(X^2 - (a+b)X + ab).$$

De plus $\operatorname{tr} A = \alpha+\beta+(n-2).0$ et $\operatorname{tr} A^2 = \alpha^2+\beta^2+(n-2).0^2$. On en déduit que $(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2) = 2\alpha\beta$. Finalement, $\chi_A = X^{n-2}\left(X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)}{2}\right)$.

Exercice 13.25

On note a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B. On a donc la relation $a \circ b = 0$ et ainsi $\operatorname{Im} b \subset \ker a$. L'idée est la même qu'habituellement : on va déterminer un vecteur propre commun à a et b afin de commencer la trigonalisation, puis on achève par récurrence sur la dimension des matrices (avec des matrices de passage par blocs).

- → si B est nulle alors a admet un vecteur propre x et ce vecteur est automatiquement propre pour b (puisque $b(x) = 0 = 0.x$).
- → SI B est non nulle. Soit $F = \operatorname{Im} b$. Cet espace est stable par b et est de dimension au moins 1. On peut donc considérer l'endomorphisme $\tilde{b}$ induit par b sur F. Il admet un polynôme caractéristique de degré au moins 1, admet une valeur propre complexe et ainsi un vecteur $x \neq 0$ dans F tel que $b(x) = \lambda x$. Ce vecteur est dans $F = \operatorname{Im} b \subset \ker a$ donc $a(x) = 0$.

Dans toutes les situations, on a donc déterminé un vecteur propre commun à a et b. Il existe donc Q inversible telle que

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix} \text{ ou } A = Q\begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix}Q^{-1}$$

et

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \beta & L' \\ (0) & \tilde{B} \end{pmatrix} \text{ ou } B = Q\begin{pmatrix} \beta & L' \\ (0) & \tilde{B} \end{pmatrix}Q^{-1}$$

La relation $AB = Q\begin{pmatrix} \alpha\beta & M \\ (0) & \tilde{A}\tilde{B} \end{pmatrix}Q^{-1}0$ donne alors $\tilde{A}\tilde{B} = 0$. On peut donc poursuivre la démonstration par récurrence. Si la propriété est vraie en dimension $n-1$, alors il existe $R \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $R^{-1}\tilde{A}R$ et $R^{-1}\tilde{A}R$ sont triangulaires supérieures. En considérant $P = Q.\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont triangulaires supérieures :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1}AQ \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & L \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & N \\ (0) & R^{-1}\tilde{A}R \end{pmatrix}.$$