12 DÉTERMINANTS

I. GROUPE SYMÉTRIQUES

Définition 1 *(Permutations)*

→ on appelle **permutation** de $E = [\![1\,;n]\!]$ toute bijection de E dans lui-même. On appelle alors groupe symétrique d'ordre n, le groupe des permutations de $[\![1\,;n]\!]$. On note ce groupe $\mathfrak{S}_n$.

→ on appelle **transposition** de $\mathfrak{S}_n$, toute permutation qui échange 2 éléments et qui laisse invariant les autres. On note $(i\ j)$ ou τ_{ij} la transposition qui permute i et j :
- il existe $\dfrac{n(n-1)}{2}$ transpositions.
- une transposition τ vérifie $\tau\circ\tau = id$ (pas de réciproque)
- un produit de 2 transpositions n'est pas (en général) une transposition.
- toute permutation se décompose en produit de transpositions.

→ on appelle **support** d'une permutation l'ensemble des éléments de $[\![1\,;n]\!]$ qui ne sont pas invariants par σ

→ on appelle **cycle** de support J, une permutation de $[\![1\,;n]\!]$ telle qu'il existe $a_1,\dots,a_p$ distincts dans $[\![1\,;n]\!]$ tels que $J=(a_1,\dots,a_p)$ et $\sigma(a_1)=a_2,\sigma(a_2)=a_3,\dots,\sigma(a_p)=a_1$.
- deux cycles (et plus généralement deux permutations) de support disjoint commutent.
- toute permutation se décompose en produit de cycles de support 2 à 2 disjoints.

→ **signature** : soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$,
- une paire $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$ est une inversion si $\sigma(i)-\sigma(j)$ et $i-j$ sont de signe opposé
- on note $\mathrm{Inv}(\sigma)$ le nombre d'inversion de σ
- on appelle *signature* de σ le nombre $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)}$.
- si σ est une transposition de $\mathfrak{S}_n$ alors $\varepsilon(\sigma)=-1$.
- l'application $\varepsilon:\mathfrak{S}_n\to\{-1,1\}$ est un morphisme de groupe - on a $\varepsilon(\sigma_1\circ\sigma_2)=\varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$ et $\varepsilon(\sigma^{-1})=\varepsilon(\sigma)^{-1}=\varepsilon(\sigma)$.

II. FORMES n-LINÉAIRES ALTERNÉES

Définition 2 *(forme n-linéaire alternée)*

soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et

$$f:\left\{\begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbb{K}\\ (v_1,\dots,v_n) & \mapsto & f(v_1,\dots,v_n)\end{array}\right.,$$

une application n-linéaire (linéaire par rapport à chacune de ses variables lorsque les $n-1$ autres sont fixées). On dit que f est alternée lorsque $f(v_1,\dots,v_n)=0$ dès qu'il existe $i\neq j$ tel que $v_i=v_j$.

Propriété 1

→ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

→ une forme n-linéaire est antisymétrique lorsque $f(\dots,v_i,\dots,v_j,\dots)=-f(\dots,v_j,\dots,v_i,\dots)$.

→ soit f une forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel :
- si $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ alors $f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)f(v_1,\dots,v_n)$
- f est antisymétrique.

Proposition 2 *(expression dans une base)*

soit f une forme n-linéaire alternée sur E, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Soit $v_1,\dots,v_n$ des vecteurs de E, qu'on décompose en

$$v_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i.$$

On a

$$f(v_1,\dots,v_n)=\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}\right)f(e_1,\dots,e_n).$$

Propriété 3 *(structure)*

L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est une droite vectorielle.

III. TROIS NOTIONS DE DÉTERMINANTS

FAMILLES DE VECTEURS

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ est une famille de vecteurs

→ si f est une forme n-linéaire alternée, on note

$$f(\mathscr{F}) = f(v_1, \dots, v_n),$$

→ si u est un endomorphisme de E, on note

$$u(\mathscr{F}) = (u(v_1), \dots, u(v_n)).$$

Définition 3 *(Déterminant dans une base)*

soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note $\det_{\mathscr{B}}$ l'unique forme n-linéaire alternée f telle que $f(\mathscr{B}) = 1$.

Propriété 4 *(déterminant dans $\mathscr{B}$)*

soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E

→ $\det_{\mathscr{B}}(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\det_{\mathscr{B}}(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$,

→ $\det_{\mathscr{B}}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n)$,

→ $\det_{\mathscr{B}}(v_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j v_j, v_2, \dots, v_n) = \det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ (avec un résultat similaire sur les autres positions).

→ $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{F}) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \cdot \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ et notamment

$$\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$$

→ $\mathscr{F}$ est une base si, et seulement si, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \neq 0$.

Exercice 1

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, $\mathscr{B}$ une base de E et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On considère l'application f définie par : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n).$$

1. On suppose qu'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$. Montrer que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
2. Montrer que $f(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{tr}(u).\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

ENDOMORPHISMES

Définition 4 *(déterminant d'un endomorphisme)*

soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base. L'application $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_n) & \mapsto & \det_{\mathscr{B}}(u(v_1), \dots, u(v_n)) \end{array} \right.$ est n-linéaire alternée. Il existe une constante notée $\det_{\mathscr{B}}(u)$ telle que $\theta = \det_{\mathscr{B}}(u) \cdot \det_{\mathscr{B}}$. Cette constante ne dépend pas de la base, on peut la noter $\det u$ (déterminant de u). On a en particulier, pour le calcul, $\det(u) = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$.

Propriété 5 *(déterminant d'un endomorphisme)*

→ $\det \mathrm{Id}_E = 1$

→ $\det(\alpha u) = \alpha^n \det u$

→ $\det(u \circ v) = \det u \cdot \det v$

→ $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det u \neq 0$ et alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$

MATRICES

Définition 5 *(déterminant d'une matrice)*

soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a trois manières équivalentes de définir $\det A$:

→ on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, éléments de $M_{n1}(\mathbb{K})$ (identifié à $\mathbb{K}^n$) et on pose

$$\det A = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_n),$$

où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $M_{n1}(\mathbb{K})$,

→ si u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, on pose $\det A = \det u$,

→ on pose $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$.

Propriété 6 *(déterminant d'une matrice)*

→ linéarité par rapport aux colonnes
→ le déterminant ne change pas si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres,
→ le déterminant change de signe si on permute deux colonnes
→ le déterminant est nul lorsque A possède une colonne de 0, possède deux colonnes identiques (ou proportionnelles)
→ $\det({}^tA) = \det(A)$ - tout ce qu'on a dit sur les colonnes passe aux lignes
→ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ et $\det AB = \det A \cdot \det B$
→ $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\det A \neq 0$. On a alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

IV. DÉTERMINANTS USUELS

MATRICES DIAGONALES, TRIANGULAIRES

on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdots a_n$$

et

$$\begin{vmatrix} a_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdots a_n$$

Exercice 2

Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

DÉTERMINANT PAR BLOCS

si $A \in M_r(\mathbb{K})$, $C \in M_{n-r}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{K})$ alors

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det A \det C.$$

Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_p$ sont des matrices carrées, on a

$$\boxed{\begin{vmatrix} A_1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{vmatrix} = \det A_1 \cdots \det A_p}$$

Exercice 3

Calculer et factoriser (on pourra utiliser des opérations par blocs)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$$

DÉVELOPPEMENT PAR RAPPORT À UNE LIGNE/COLONNE

Définition 6 *(mineurs et cofacteurs)*

soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle

- → mineur d'indice (i, j) (noté $\Delta_{i,j}$) le déterminant de la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A,
- → cofacteur d'indice (i, j) (noté $A_{i,j}$) le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
- → comatrice de A, notée $\text{Com}A$, la matrice des cofacteurs de A.

Propriété 7 *(développement, comatrice)*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors

- → pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (développement par rapport à la ligne i).
- → pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on a $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (développement par rapport à la colonne j).
- → On a, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$,

$$\boxed{A \cdot {}^t\text{Com}A = {}^t\text{Com}A \cdot A = (\det A) I_n}.$$

- → Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$:
  - si $\text{rg}\, A = n$ alors $\text{rg}\,(\text{Com}(A)) = n$.
  - si $\text{rg}\, A = n-1$ alors $\text{rg}\,(\text{Com}(A)) = 1$.
  - si $\text{rg}\, A \leqslant n-2$ alors $\text{rg}\,(\text{Com}(A)) = 0$.

Exercice 4

Déterminer la valeur du déterminant de taille n suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5

Déterminer sous forme simplifiée

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

DÉTERMINANT DE VANDERMONDE

soient $a_1, \cdots, a_n$ des scalaires, on a

$$\boxed{V(a_1,\cdots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).}$$

La démonstration se fait par récurrence sur la taille de la matrice (et/ou le nombre d'éléments, c'est la même chose). On va prouver que

$$V(a_1,\cdots,a_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)\right) V(a_1,\cdots,a_{n-1}),$$

ce qui donnera ensuite directement le résultat par récurrence.

→ *Méthode 1 :* on effectue les opérations : $L_i \leftarrow L_i - a_n L_{i-1}$ pour $i = n, \cdots, 2$ (dans cet ordre, c'est important), on obtient alors

$$\begin{aligned} & V(a_1, \cdots, a_n) \\ = & \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 - a_n & a_2 - a_n & \cdots & a_{n-1} - a_n & 0 \\ a_1(a_1 - a_n) & a_2(a_2 - a_n) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2}(a_1 - a_n) & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On peut alors développer par rapport à la dernière colonne, il vient

$$\begin{aligned} & V(a_1, \cdots, a_n) \\ = & (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_2 - a_n & \cdots & a_{n-1} - a_n \\ a_1(a_1 - a_n) & a_2(a_2 - a_n) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-2}(a_1 - a_n) & a_2^{n-2}(a_2 - a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) \end{vmatrix} \\ = & (-1)^{n+1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} (a_i - a_n) \right) V(a_1, \cdots, a_{n-1}) \end{aligned}$$

ce qui donne la relation de récurrence en écrivant $(a_i - a_n) = -(a_n - a_i)$.

→ *Méthode 2 :* on remplace la ligne n par une relation $L_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i L_i$. On voit que le terme d'indice (n, k) s'écrit $a_k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_k^{i-1} = P(a_k)$ où P est le même polynôme pour tous, unitaire, de degré $n-1$:

$$P = X^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i X^{i-1}.$$

Le polynôme P n'est pas encore vraiment choisi puisque la combinaison est quelconque. On va s'arranger pour faire disparaître le maximum de termes. Plus précisément on va choisir les coefficients en développant

$$P = (X - a_1) \cdots (X - a_{n-1}).$$

Ce polynôme est bien unitaire de degré $n-1$, on trouve donc les bons coefficients λ_i en le développant. Avec ce polynôme, il vient

$$\begin{aligned} V(a_1, \cdots, a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ P(a_1) & P(a_2) & \cdots & P(a_n) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & P(a_n) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

soit de nouveau le résultat (déterminant par blocs).

V. MÉTHODES DE CALCUL

Voici quelques méthodes à essayer lorsqu'on vous demande de calculer un déterminant :

→ Manipuler les lignes et colonnes afin de se ramener à un déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) : pour cela on dispose des opérations élémentaires sûres : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($j \neq i$) qui ne change pas le déterminant et $L_i \leftrightarrow L_j$ qui change le signe. On évitera si possible de multiplier ou diviser une colonne par des paramètres (sauf si on sait qu'ils ne sont pas nuls), en revanche, on peut sortir un terme dès qu'il est en facteur sur une ligne ou colonne.

→ Dans le cas de déterminant d'ordre n (qu'on note ici Δ_n), on peut essayer de chercher des relations de récurrence d'ordre 1 ou 2, essentiellement à l'aide des manipulations ci-dessus et en développant par rapport à une ligne ou une colonne : on appliquera cette dernière méthode, en général, lorsqu'il n'y a qu'un ou deux termes sur une ligne ou colonne.

→ Dans le cas de déterminant d'ordre n, il n'est pas inintéressant de commencer par des exemples ($n = 2, 3, 4$) afin de se donner quelques idées (et au moins avancer un peu).

→ On peut essayer d'interpréter la matrice comme la matrice d'un certain endomorphisme et réexprimer la matrice de cet endomorphisme dans une base plus adaptée (pas toujours facile à voir).

→ On peut essayer de décomposer la matrice en produit de 2 (ou plusieurs) matrices plus simples, mais ce n'est pas non plus toujours facile à déterminer.

Exemple

Calculer la valeur du déterminant de taille $2n$ suivant (On note A_n la matrice correspondante) :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & & & (0) & & & b \\ & \ddots & & & & \iddots & \\ (0) & & a & & b & & (0) \\ & & b & & a & & \\ & \iddots & & & & \ddots & \\ b & & & (0) & & & a \end{vmatrix}$$

→ *Méthode 1 :* on développe par rapport à la première colonne. On trouve alors

$$\Delta_n = a \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & A_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \\ & & & 0 \\ & A_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{vmatrix},$$

puis en redéveloppant chacun des déterminants par rapport à la dernière colonne on a

$$\Delta_n = a^2 \Delta_{n-1} - b^2 (-1)^{2n-1+1} \Delta_{n-1} = (a^2 - b^2)\Delta_{n-1}.$$

Avec $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$, on obtient $\Delta_n = (a^2 - b^2)^n$.

→ *Méthode 2 :* on considère l'endomorphisme canoniquement associé à A_n dans la base $(e_1, \cdots, e_{2n})$. On voit que les vecteurs marchent par deux : e_k avec e_{2n-k+1}. On écrit alors le déterminant de la matrice de l'endomorphisme dans la base $(e_1, e_{2n}, e_2, e_{2n-1}, \cdots, e_n, e_{n+1})$, on trouve (on n'oublie pas que le déterminant de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie) :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & & \\ b & a & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & a & b \\ & & & b & a \end{vmatrix},$$

soit, en utilisant les résultats sur les matrices triangulaires par blocs,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}^n = (a^2 - b^2)^n.$$

VI. EXERCICES

CALCUL DE DÉTERMINANTS

Exercice 6

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont le terme général est $a_{ij} = |i - j|$. Déterminer $\det A$.

Exercice 7

On veut calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

où a, b, c sont des réels ou complexes avec $b \neq c$. Pour cela on considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{vmatrix} a+x & b+x & \cdots & b+x \\ c+x & a+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ c+x & \cdots & c+x & a+x \end{vmatrix}$$

Montrer que f est polynomiale de degré au plus 1 en x. En déduire une expression simple de f, puis la valeur du déterminant.

Exercice 8

On considère une matrice M de $M_{2p}(\mathbb{K})$ écrite sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ où $(A, B, C, D) \in M_p(\mathbb{K})^4$.

1. On suppose que A est inversible et que $AB = BA$. En trouvant un matrice triangulaire inférieure par bloc P (et une matrice X) telle que

$$P.M = \begin{pmatrix} I_p & X \\ 0 & AD - BC \end{pmatrix},$$

montrer que $\det M = \det(AD - BC)$.

2. On ne suppose plus que A est inversible mais seulement $AB = BA$. Montrer que la propriété reste valable.

Exercice 9

Soit n un entier au moins égal à 2 et $P_n = X^n - X + 1$. On note $x_1, \cdots, x_n$ les racines complexes de P_n et A la matrice de taille n telle que $a_{ii} = 1 + x_i$ et $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$. Calculer $\det A$.

Exercice 10 *(Mines MP 2009)*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{rg} B = 1$. Montrer que $\det((A - B)(A + B)) \leqslant \det A^2$.

Exercice 11 *(Centrale MP)*

On munit $E = M_n(\mathbb{C})$ de la base $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{1n} \dots, E_{nn})$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Calculer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f de l'espace vectoriel E défini par : $\forall M \in E, \quad f(M) = AM$.

Exercice 12 *(Mines MP 2011)* ✰

Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\det(A + J)$ en fonction de A. Application lorsque $A = (a_j^{i-1})$ où les réels $a_1, \dots, a_n$ sont distincts.

Exercice 13

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(C + X) = \det(X)$. Montrer que $\det C = 0$, puis $C = 0$.
2. Soient A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\det(A + X) = \det(B + X)$. Montrer que $A = B$.