11 ESPACES VECTORIELS NORMÉS

I. NORMES

DÉFINITIONS

Définition 1 *(Norme)*

on appelle norme sur E une application :
- → $N : E \to \mathbb{R}^+$ (existence et positivité),
- → $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie),
- → $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité),
- → $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

On notera $\|.\|$ à la place de N.

Proposition 1 *(Différentes normes)*

- → **norme euclidienne** : si $< ., . >$ est un produit scalaire sur E, alors l'application $x \mapsto \sqrt{< x, x >}$ est une norme. Une norme provenant d'un produit scalaire est appelée *norme euclidienne*.
- → **norme induite** : si F est un sev de E, l'application $x \mapsto \|x\|_E$ définit une norme sur F, appelée norme induite sur F.
- → **norme produit** : si $(E_i, N_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont des $\mathbb{K}$-ev, on munit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ d'une norme par

$$\|(x_1, \ldots, x_p)\| = \sup_{i \in [\![1\,;p]\!]} N_i(x_i).$$

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application

$$P \mapsto \|P\| = \sup_{t \in [0,1]} |P(t) - P'(t)|$$

Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.

Exercice 2

Montrer que l'application $A \mapsto \left(\operatorname{tr}({}^tA.A)\right)^{1/2}$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et qu'elle vérifie $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$ (on dit que c'est une norme matricielle).

Définition 2 *(Boules)*

- → boule ouvert de centre a, de rayon r : $B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$
- → boule fermé de centre a, de rayon r : $\overline{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leqslant r\}$
- → sphère de centre a, de rayon r : $S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$

On obtient ces boules à partir des boules $B(0, 1)$ et $\overline{B}(0, 1)$ par translation et homothétie. Les boules sont convexes.

Définition 3 *(Algèbre normée)*

on dit qu'une algèbre $(E, \|.\|)$ est une algèbre normée, lorsque $(E, \|.\|)$ est un evn et que la norme vérifie $\|x.y\| \leqslant \|x\|.\|y\|$ pour tout $x, y \in E$. On dit que c'est une algèbre normée unitaire si, de plus, $\|1_E\| = 1$.

Définition 4 *(Parties bornées)*

- → une partie A de E est bornée lorsqu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $a \in A$, $\|a\| \leqslant M$. Une partie A est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule.
- → une application f de X dans $(A, \|.\|)$ est bornée lorsque $f(X)$ est une partie bornée de E (il existe M tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leqslant M$).

Définition 5 *(Applications lipschitziennes)*

- → Soit $f : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$. Elle est K-lipschiztienne lorsque, pour tout $x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant K \|x - y\|_E$.
- → L'ensemble des applications K-lipschitiennes n'est pas un espace vectoriel, celui des applications lipschitziennes en est un.

DISTANCE

Proposition 2 *(Distances)*

- **distance associée à une norme** : l'application $(x, y) \mapsto \|x-y\|$ est une distance sur E, appelée distance associée à la norme $\|.\|$.
- **distance à une partie** : si $A \subset E$ non vide, on peut définir la distance à A par

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x-a\|.$$

Cette distance est 1-lipschitzienne : $\left|d(x,A)-d(y,A)\right| \leqslant \|x-y\|$.

II. SUITES

LIMITE

Définition 6 *(Limite)*

une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ lorsque

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \|u_n-\ell\| < \varepsilon.$$

Si la limite existe, elle est unique. Une suite convergente est bornée. On dispose des opérations usuelles sur les limites (combinaison linéaire, produit dans une algèbre normée). Dans un espace produit muni de la norme infinie produit, une suite converge si, et seulement si chaque suite composante converge.

NORMES ÉQUIVALENTES

Définition 7

domination, équivalence soit N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que
- N_1 domine N_2 lorsqu'il existe $\alpha>0$ tel que $N_2 \leqslant \alpha N_1$.
- N_1 et N_2 sont équivalentes lorsqu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\beta N_1 \leqslant N_2 \leqslant \alpha N_1.$$

Méthode *(non-équivalence)*

pour prouver qu'une norme N_1 n'est pas dominée par N_2, on essaie de construire une suite de vecteurs telle que $\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}$ est de limite infinie - pour cela on peut essayer de construire une suite de vecteurs unitaires pour l'une des normes (et de limite nulle ou infinie - suivant le sens - pour les normes de l'autre).

Propriété 3

- N_1 domine N_2 si et seulement si toute suite convergente pour N_1 converge pour N_2 (et vers la même limite).
- deux normes sont équivalentes si et seulement si elles ont exactement les mêmes suites convergentes.

Exercice 3 *(CCP - 37)*

Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour $f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f|$.

1. (a) Démontrez succintement que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.
   (b) Démontrez qu'il existe $k>0$ tel que $N_1 \leqslant k.N_\infty$.
   (c) Démontrez que tout ouvert pour N_1 est un ouvert pour N_∞.
2. Démontrez que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 *(CCP - 38)*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \text{ et } N_\infty(P) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|.$$

1. (a) Démontrez que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.
   (b) Démontrez que tout ouvert pour N_∞ est un ouvert pour N_1.
   (c) Démontrez que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

2. On note N_1' et N_∞' les restrictions des normes à $\mathbb{R}_k[X]$. Sont-elles équivalentes ?

Théorème 1 *(dimension finie)*

→ si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

→ si $\{e_1,\dots,e_p\}$ est une base de l'evn de dimension finie E, on peut écrire, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)} e_k$. Si $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k e_k$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n^{(k)} = \ell_k \text{ pour tout } k \in [\![1\,;p]\!].$$

Valeurs d'adhérence

Définition 8 *(Valeur d'adhérence)*

on dit que ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite extraite qui converge vers ℓ.

Proposition 4 *(lien avec la limite)*

soit (u_n) une suite de E.

→ si (u_n) converge vers ℓ, alors la suite n'admet qu'une valeur d'adhérence ℓ - si une suite admet deux valeurs d'adhérence, elle diverge.

→ une suite n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence n'est pas forcément convergente.

III. Topologie des E.V.N.

Ouverts

Définition 9 *(ouvert, voisinage)*

→ une partie O de E est ouverte lorsque, pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$.

→ une partie A de E est un voisinage de x lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$ (A contient une boule ouverte centrée en x).

Propriété 5 *(des ouverts)*

→ E, $\emptyset$, les boules ouvertes sont ouverts. Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont ouverts.

→ une union quelconque d'ouverts, une intersection finie d'ouverts sont des ouverts.

Définition 10 *(intérieur)*

→ x est intérieur à A lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.

→ l'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A - c'est le plus grand ouvert contenu dans A, à savoir la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A :

$$\mathring{A} = \bigcup_{O \text{ ouvert } \subset A} O.$$

→ A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

Fermés

Définition 11 *(fermé)*

une partie F de E est fermée lorsque $E \backslash F$ est ouvert.

Propriété 6 *(des fermés)*

→ E, $\emptyset$, les boules fermées sont fermés.

→ une union finie de fermés, une intersection quelconque de fermés sont des fermés.

Définition 12 *(adhérence)*

→ On dit que x est adhérent à A lorsque, pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

→ L'adhérence de A, notée $\bar{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A. C'est le plus petit fermé qui contient A, à savoir

$$\bar{A} = \bigcap_{A\subset F \text{ fermé}} F.$$

→ A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$

Propriété 7 *(caractérisations séquentielles et autres)*

- → $x \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.
- → F est fermé si et seulement si pour toute suite (x_n) de F qui converge vers $x \in E$, on a $x \in F$.
- → une partie A est dense dans E lorsque $\bar{A} = E$ (ou dans X lorsque $\overline{A} = X$).
- → on appelle frontière de A le fermé $\mathrm{Fr} A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Remarque : l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé, plus précisément $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{\{x_k, k \geqslant n\}}$.

Exercice 5 *(CCP - 34)*

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E

1. Démontrez que $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
2. Démontrez que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ aussi.
3. Démontrez que si A est convexe, alors $\bar{A}$ aussi.

Exercice 6 *(CCP - 44)*

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie convexe de E.

1. Montrer que l'adhérence de A est convexe.
2. Montrer que l'intérieur de A est convexe.

Exercice 8 *(Topologie et sous-espaces vectoriels)*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset F$. Montrer que $E = F$.
2. Montrer que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. On suppose que F est un hyperplan de E. Montrer l'alternative : F est fermé ou F est dense dans E. Trouver des exemples.
4. On suppose que F est de dimension finie. Montrer que F est fermé.

TOPOLOGIE RELATIVE

Définition 13 *(topologie relative)*

soit A une partie de E, un partie $B \subset A$ est
- → un ouvert relatif de A lorsqu'il existe O ouvert de E tel que $B = A \cap O$,
- → un fermé relatif de A lorsqu'il existe F fermé de E tel que $B = A \cap F$,
- → un voisinage de a relatif à A lorsqu'il existe $\mathscr{V}$ voisinage de a dans E tel que $B = A \cap \mathscr{V}$,

COMPACTS

Définition 14 *(compact)*

soit K une partie de E. On dit que K est compact lorsque toute suite d'éléments de K admet une valeur d'adhérence dans K (i.e. admet une suite extraite convergente dans K).

Théorème 2 *(Bolzano-Weierstrass)*

soit (u_n) une suite bornée de réels, alors on peut en extraire une suite convergente. Ce résultat se généralise pour les suites complexes et les suites dans un evn de dimension finie.

Propriété 8 *(propriétés topologiques)*

- si K est une partie compacte de E, alors K est fermé et borné.
- si K' est une partie d'un compact K, alors K' est compact si et seulement si K' est fermé.
- si E est de dimension finie, alors les compacts sont exactement les fermés bornés.
- Un produit fini de compacts est encore compact (dans l'evn produit usuel).
- **important** : Si (u_n) est une suite d'un compact qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence ℓ alors cette suite converge vers ℓ.

IV. ÉTUDE LOCALE D'UNE APPLICATION

DÉFINITIONS

Dans cette partie, E et F sont deux evn et $A \subset E$ non vide.

Définition 15

- **Limite** : soit $f : A \to F$ et a adhérent à A. On dit que f admet ℓ pour limite en a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x-a\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F < \varepsilon.$$

  Cette limite est alors unique. Elle est notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- **Continuité** : soit $f : A \to F$ et $a \in A$. On dit que f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue sur A lorsqu'elle est continue en tout point de A.

CARACTÉRISATIONS DE LA LIMITE/CONTINUITÉ

Proposition 9 *(Caractérisations)*

- **par les suites** : on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a, alors $(f(u_n))$ converge vers ℓ.
- **par les voisinages** : on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de ℓ, il existe $\mathscr{U}$ un voisinage de a tel que $f(\mathscr{U} \cap A) \subset \mathscr{V}$.

OPÉRATIONS

Proposition 10 *(Opérations)*

- **limites** : soit $f, g : A \to F$ qui admettent une limite, respectivement ℓ et ℓ' en $a \in \bar{A}$.
  - pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + \lambda g(x)) = \ell + \lambda \ell'$,
  - si F est une algèbre normée, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \ell.\ell'$,
- **composition** : soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$ avec $f(A) \subset B$. Soit $a \in \bar{A}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = \ell$.
- **continuité** : on a des résultats semblables pour la continuité en a, et la continuité sur A.

CONTINUITÉ UNIFORME

Définition 16 *(continuité uniforme)*

soit $f : A \to F$. On dit que f est uniformément continue sur A lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in A, \|x-y\| < \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon.$$

La continuité uniforme entraine la continuité.

LIEN AVEC LA TOPOLOGIE

Proposition 11 *(images réciproques)*

soit $f : A \to F$, alors on a l'équivalence entre
- f est continue sur A,
- pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert relatif de A.
- pour tout fermé F' de F, $f^{-1}(F')$ est un fermé relatif de A.

Exercice 9

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le sous-ensemble des matrices symétriques (puis antisymétriques) de E est une partie fermée de E.
2. Soit B une matrice antisymétrique. On suppose que la suite (B^n) converge vers une matrice C. Que peut-on dire de la matrice C?

Exercice 10

On note F l'ensemble des triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que l'équation $ax^2+bx+c=0$ admette deux solutions réelles distinctes. Montrer que F est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

CONTINUITÉ ET COMPACTS

Proposition 12 *(lien avec la compacité)*

- → **image directe** : si f est continue sur A, si K est un compact de E inclus dans A, alors $f(K)$ est un compact de F.
- → **continuité uniforme** : si $f : K \to E$ est continue et K compact, alors f est uniformément continue sur K.

V. QUELQUES SYNTHÈSES

Propriété 13

normes équivalentes si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors
- → elles conservent la nature des suites et la valeur des limites (suites), les valeurs d'adhérence
- → elles conservent les propriétés de limites et continuité (fonctions), le fait d'être lipschitzien,
- → elles ont les mêmes ouverts, fermés, bornés (mais les boules sont différentes), les adhérences et intérieurs sont conservés.

Propriété 14 *(Dimension finie)*

Soit E un espace vectoriel normée de dimension finie
- → toutes les normes sur E sont équivalentes,
- → les compacts de E sont les fermés bornés,
- → une suite de E converge si et seulement si elle converge coordonnées par coordonnées (dans une base),
- → une fonction de A vers E (arrivée de dimension finie) admet une limite en a (resp. est continue en a) si et seulement si ses applications composantes admettent une limite en a (resp. est continue en a),

VI. EXERCICES

NORMES, NORMES ÉQUIVALENTES

Exercice 11

Soit $E=\mathbb{R}^2$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on considère :

$$N((x,y)) = \sup_{t\in[0,1]} |x+t\,y|.$$

1. Montrer que N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité pour cette norme.
3. Trouver le meilleure encadrement possible avec les trois normes habituelles sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12

Soit $E=\{f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}\}$. On pose pour tout $f\in E$,

$$N(f)=\sqrt{\left|f(0)\right|^2+\int_0^1 \left|f'(t)\right|^2\,dt}.$$

1. Montrer que N est une norme euclidienne sur E.
2. Etablir que pour tout $f\in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Montrer que les normes $\|.\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes (on pourra utiliser la suite (f_n) où $f_n(x)=x^n$).

Exercice 13

Soit E l'ensemble des $(n+1)$-uplets de complexes distincts. Pour tout $Z=(z_0,z_1,..,z_n)$ de E et tout P de $\mathbb{C}_n[X]$, on pose $N_Z(P)=\sum\limits_{k=0}^{n}\left|P(z_k)\right|$.

1. Montrer que N_Z est une norme sur $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Soient des éléments Z et Z' de E comparer N_Z et $N_{Z'}$.
3. Trouver effectivement $c > 0$ telle que $N_Z \leqslant cN_{Z'}$.

Exercice 14

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E et B_1 et B_2 les boules ouvertes unité pour N_1 et N_2. Montrer que si $B_1 = B_2$ alors $N_1 = N_2$.

Exercice 15

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et telle que $u_0 = 0\}$. On définit

$$\left\{\begin{array}{ccl} N_\infty(u) & = & \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \\ N(u) & = & \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n| \end{array}\right.$$

1. Montrer qu'on obtient bien deux normes.
2. Montrer que $N \leqslant 2N_\infty$ et que la majoration est optimale.
3. Montrer que les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 16 *(normes p)*

Soit $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$. Soit $p \in]1,+\infty[$ et q le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tout $\alpha, \beta \geqslant 0$, on a $\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.
2. En déduire l'inégalité de Hölder : pour tout $f, g \in E$,
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$
On commencera par le montrer dans le cas où $\int_a^b |f(t)|^p\,dt = 1 = \int_a^b |g(t)|^q\,dt$.
3. En utilisant $|f+g|^p = |f+g|^{p-1}.|f+g|$, montrer que, pour $f, g \in E$, on a
$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}.$$
En déduire que $f \mapsto \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur E.

SUITES D'UN EVN

Exercice 17

Soit $\|.\|$ une norme sur $E = M_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$ (la norme est constante sur les classes de similitude).

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans E.
2. Montrer que, pour tout $A, B \in E$, alors $\|AB\| = \|BA\|$.
3. En déduire une contradiction.

Exercice 18

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et F une sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| = d(x, F)$ (on pourra construire une suite (y_n) de F telle que $\|x - y_n\|$ converge vers la distance).
2. Montrer que si $F \neq E$, alors il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.
3. En déduire que si E est de dimension infinie, alors on peut construire une suite de vecteurs unitaires de E, distants deux à deux d'au moins 1.
4. Montrer que si la boule unité de E est compacte, alors E est de dimension finie.

SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 19

Soit z une suite définie par un premier terme $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

Montrer que (z_n) converge et déterminer sa limite en fonction du module et d'un argument de z_0.

Exercice 20

Soit, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant n$.
2. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est bornée .
3. Montrer que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge et donner sa limite.
4. Déterminer la limite de $u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 21 *(Moyenne arithmético-géométrique)*

Soient deux réels $0 < a < b$. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} & = & \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que ces deux suites convergent vers un même réel.

Exercice 22

On considère l'équation $P_n(x) = x^n + x - 1 = 0$.

1. Montrer qu'elle possède une unique solution positive. On l'appelle x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 23 *(Suite de Fibonacci)*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Montrer les relations suivantes, pour $n \geqslant 1$,
   (a) $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$.
   (b) $u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$
   (c) $u_n^2 - u_{n-1} u_{n+1} = (-1)^n$
2. Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.
3. Donner la limite de u_{n+1}/u_n.
4. Soit $\alpha > 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = v_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1}^\alpha + v_n^\alpha.$$

   (a) Montrer que v_n est croissante.
   (b) Donner une relation vérifiée par une (la) limite éventuelle ℓ de v_n
   (c) Montrer que si $\alpha \in]0,1[$, alors v_n est majorée par ℓ et conclure.
   (d) Montrer que si $\alpha > 1$, alors v_n est minorée par ℓ et conclure.

Exercice 24

Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{x_n} + x_n = n$. Donner un développement asymptotique à trois termes de cette suite.

Exercice 25

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ où

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}.$$

Exercice 26 *(Suites définies par récurrence)*

Étudier les suites définies par

1. $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sin u_n$
2. $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$
3. $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$

Exercice 27

Soit (u_n) une suite bornée de réels. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \frac{1}{2}u_{2n} = 1$. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 28 *(Quelques résultats de densité)*

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à 0.
   (a) Justifier l'existence de $a = \inf\{g \in G, g > 0\}$.
   (b) *Premier cas :* on suppose $a > 0$. Montrer que $a \in G$, puis que $G = a.\mathbb{Z}$.
   (c) *Second cas :* on suppose que $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Application : soit θ un réel tel que $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $[-1,1]$.
3. (a) Soit u et v deux suites réelles qui divergent vers $+\infty$ et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Montrer que $H = \{u_n - v_p, (n,p) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la suite $(\sin(\pi\sqrt{n}))$ est dense dans $[-1,1]$.

TOPOLOGIE

Exercice 29 *(Somme de parties)*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties de E. On note $A+B = \{a+b, a\in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si A est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.
2. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A+B$ est compact.
3. Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A+B$ est fermé.
4. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}^-$ deux parties de $\mathbb{R}^2$. Montrer que A et B sont fermées. Que peut-on dire de $A+B$?

Exercice 30 *(Diamètre)*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit A une partie non vide bornée de E. Justifier l'existence de $\sup\{\|a-b\|, a, b \in A\}$. On note $\delta(A)$ ce réel, et on l'appelle diamètre de A.
2. Montrer que $\delta(A) = \delta(\bar{A})$.
3. On suppose que A est compacte. Montrer qu'il existe $a, b \in A$ tels que $\|a-b\| = \delta(A)$.
4. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts de E, et $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. A-t-on $\delta(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \delta(A_n)$?

Exercice 31 *(Frontière)*

Soit E un espace vectoriel normé. On note $\text{Fr}(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A}$ la frontière de A.

1. Comparer $\text{Fr}(A)$ et $\text{Fr}(E\backslash A)$.
2. Montrer que $\text{Fr}(\overline{A}) \subset \text{Fr}(A)$ et $\text{Fr}(\mathring{A}) \subset \text{Fr}(A)$. Ces inclusions sont-elles des égalités ?
3. Montrer que $\text{Fr}(A\cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$. Est-ce une égalité ?

Exercice 32 *(Mines MP 2011)*

Soit $E = \mathscr{C}^0(]0,1[,\mathbb{R})$ de carré intégrable, muni de la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$. Soit $F = \{f \in E, \int_0^1 |f| < 1\}$. L'ensemble est-il ouvert ? convexe ? borné ?

Exercice 33 *(Mines MP 2016)*

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien et $\Omega = \left\{(x, y) \in E^2, (x, y) \text{ libre}\right\}$. Montrer que Ω est un ouvert de E^2

Exercice 34

Soit E un espace vectoriel normé et K un compact de E. Soit $f : K \to K$ telle que

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que f possède au plus un point fixe.
2. A l'aide la fonction
$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{R}^+ \\ z & \mapsto & \|f(z) - z\| \end{array} \right.$$
montrer que f admet un point fixe a.
3. Soit (u_n) définie par $u_0 \in K$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que cette suite converge vers a (*Indic :* étudier $\|u_n - a\|$).

Exercice 35 *(Mines MP 2011)*

Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $A \subset E$.

1. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.
2. Soit $x \in E$. Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.
3. Soit K un compact non vide de E et $x_0 \in E$. Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $\|x_0 - a\| = d(x_0, K)$.
4. Soit F un fermé non vide de E, $x_0 \notin F$ et $a \in F$. Montrer que la distance $d\left(x_0, F \cap \overline{B}(x_0, \|x_0 - a\|)\right)$ est atteinte et en déduire qu'il existe $b \in F$ tel que $d(x_0, F) = \|x_0 - b\|$.

Exercice 36 *(Mines-Ponts MP)*

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme, et une matrice A dont la suite des puissances $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. On pose alors $B_p = \dfrac{I_n + A + \cdots + A^{p-1}}{p}$ pour $p \geq 1$.

1. Montrer que (B_p) admet une valeur d'adhérence. On en choisit une, notée B. Montrer que $BA = AB = B$ puis que $B^2 = B$.
2. Montrer que $\ker B = \operatorname{Im}(A - I_n)$ et que $\operatorname{Im} B = \ker(A - I_n)$.
3. Déduire de tout cela que $\lim\limits_{p\to+\infty} B_p = B$.

Exercice 37

Soit E l'ensemble des suites bornées muni de la norme infini. Déterminer l'adhérence de l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

Exercice 38 ☆

1. Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E et $f : K \to K$ une isométrie (pour tout $x, y \in E$, $\left\|f(x) - f(y)\right\| = \left\|x - y\right\|$. Montrer que f est bijective.
2. Soit K compact de E est $f : K \to K$ continue telle que $\|f(x) - f(y\| \geq \|x - y\|$. Montrer que f est une isométrie bijective. On étudiera les suites $x_n = f^n(x_0)$ et $y_n = f^n(y_0)$ pour x_0 et y_0 dans K.

CONTINUITÉ, CONTINUITÉ UNIFORME

Exercice 39 *(Mines MP 2010)*

1. Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\operatorname{Com}(AB) = \operatorname{Com}(A)\operatorname{Com}(B)$.
3. Donner le rang de $\operatorname{Com}(A)$ en fonction de celui de A.

Exercice 40

1. Soit (u_n) une suite convergente d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. On note ℓ la limite de cette suite. Montrer que $F = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est fermé.

2. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que l'image réciproque de tout compact est compacte. Montrer que f est une application fermée, c'est-à-dire que l'image directe de tout fermé est un fermé.

Exercice 41

Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre

1. l'image réciproque de tout compact est compact.
2. $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$.

Exercice 42

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, mais qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 43

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $G_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de f.

1. Montrer que si f est continue, alors G_f est fermé.
2. Si f est bornée et si G_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$, montrer que f est continue.
3. Le résultat précédent subsiste-t-il si f n'est pas bornée ?

Exercice 44

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. On suppose que, pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 45

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathscr{C}^0(E,\mathbb{R})$ telle que,

$$\exists c > 0, \exists R > 0, \forall x \in E, \|x\| > R \Rightarrow f(x) > c\|x\|.$$

Montrer que f admet un minimum.

Exercice 46

Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles ou complexes. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\,dt$. Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.