CHAPITRE 11 - ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Exercice 11.1

→ existence : la fonction $t \mapsto |P(t) - P'(t)|$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc elle est majorée et $\|P\|$ existe et est positive.

→ définie : soit P de norme nulle. La fonction polynomiale $P - P'$ est nulle sur $[0,1]$, donc le polynôme $P - P'$ est le polynôme nul. On a donc $P = P'$, ce qui est impossible pour des raisons de degré si P n'est pas le polynôme nul. Ainsi $\|P\| = 0$ entraîne $P = 0$.

→ homogénéité : si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\sup_{t\in[0,1]} |\lambda P(t) - \lambda P'(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda||P(t) - P'(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - P'(t)|,$$

puisque $|\lambda| \geqslant 0$. Cela donne $\|\lambda P\| = |\lambda|\,\|P\|$.

→ inégalité triangulaire : soit $P, Q \in E$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$|(P+Q)(t) - (P+Q)'(t)| \leqslant |P(t) - P'(t)| + |Q(t) - Q'(t)| \leqslant \|P\| + \|Q\|\,.$$

On a donc un majorant, si bien que $\|P+Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$.

Exercice 11.2

→ l'application est la norme associée au produit scalaire usuel sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire celui qui à (A, B) associe $\operatorname{tr}({}^tA.B)$.

→ On effectue le calcul directement :

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (AB)_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right)^2,$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} B_{kl}^2\right).$$

On obtient alors

$$\|AB\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} B_{kl}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} B_{kl}^2\right) = \|A\|^2\,\|B\|^2\,.$$

Exercice 11.3

1. (a) Les deux normes sont bien définies et positives : la norme 1 car on intègre une fonction continue positive sur un segment, la norme infinie car une fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes).
   → norme ∞ : $p_\infty(f) = 0$ si et seulement si f est nulle sur $[0,1]$. On a

   $$p_\infty(\lambda f) = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda|\,|f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

   car $|\lambda|$ est positif. Enfin si $x \in [0,1]$, on a

   $$|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g),$$

   si bien que $N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
   → norme 1 : l'homogénéité est immédiate, si $x \in [0,1]$, on a $|(f+g)(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$, d'où par croissance de l'intégrale $N_1(f+g) \leqslant N_1(f) + N_1(g)$. Enfin, si $N_1(f) = 0$, alors, puisque $|f|$ est continue et positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, la fonction $|f|$ est nulle.

   (b) Pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant N_\infty(f)$. En intégrant, on a $N_1(f) \leqslant N_\infty(f)$.

   (c) Soit O un ouvert pour N_1 et $f_0 \in O$. Il existe $r > 0$ tel que $B_1(f_0, r) \subset O$. Si $N_\infty(f - f_0) < r$, on a $N_1(f - f_0) \leqslant N_\infty(f - f_0) < r$. Ainsi on a les inclusions $B_\infty(f_0, r) \subset B_1(f_0, r) \subset O$ et O est un ouvert pour la norme N_∞.

2. On considère $f_n : x \mapsto x^n$. On a $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$ et $N_\infty(f_n) = 1$. Ainsi $\frac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = n+1$ n'est pas majoré. Il n'existe donc pas de constante K telle que $N_\infty \leqslant K.N_1$.

Exercice 11.4

1. (a) voir cours.

   (b) voir exercice précédent.

   (c) On considère $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Pour ce polynôme, $N_1(P_n) = n+1$ et $N_\infty(P_n) = 1$. Le quotient N_1/N_∞ n'est pas majoré et les normes ne sont pas équivalentes.

2. on a deux normes sur un espace de dimension finie. Elles sont donc équivalentes.

Exercice 11.5

1. On prouve les deux implications.

   (a) Soit $A \in \bar{A}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B(x, \varepsilon)$ rencontre A. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a notamment un élément au moins dans $A \cap B(x, \frac{1}{n+1})$. On l'appelle x_n. La suite x_n est une suite d'éléments de A et $\|x - x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$, si bien que x est la limite de la suite x_n.

(b) Réciproquement, supposons l'existence de la suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers x. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\|x - x_n\| < \varepsilon$. L'élément x_{n_0} est dans $A \cap B(x, \varepsilon)$.

2. Soit x, y dans $\bar{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe deux suites d'éléments de A, (x_n) et (y_n), qui convergent respectivement vers x et y. Par propriété de la limite, la suite $(x_n + \lambda y_n)$ converge vers $x + \lambda y$. De plus, c'est une suite d'éléments de A puisque A est un sous-espace vectoriel de E. On en déduit que $\bar{A}$ est encore un sous-espace vectoriel de E.
3. Même principe : avec x, y dans $\bar{A}$ et $\lambda \in [0,1]$. Il existe deux suites d'éléments de A, (x_n) et (y_n), qui convergent respectivement vers x et y. Alors $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $\lambda x + (1-\lambda) y$, donc $\lambda x + (1-\lambda) y \in \bar{A}$.

Exercice 11.6

Soit E un espace vectoriel normé. On note A et B deux parties non vides de E.

1. (a) $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x.

   (b) On suppose $A \subset B$. Prouvons que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A}$.
   Il existe une suite (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.
   Or $A \subset B$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.
   Donc $x \in \overline{B}$.
2. D'après la question précédente,
   $A \subset A \cup B$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.
   $B \subset A \cup B$, donc $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Prouvons que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A \cup B}$.
   Il existe une suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.
   On considère les ensembles $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in A\}$ et $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in B\}$.
   Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$, A_1 ou A_2 est de cardinal infini. On peut donc extraire de (u_n) une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ à valeurs dans A ou une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ à valeurs dans B telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = x$.
   Donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Remarque :On peut aussi prouver que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ sans utiliser les suites :

   $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont fermés, donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$. Or $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$, donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) D'après la question 1. ,
   $A \cap B \subset A$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$.
   $A \cap B \subset B$, donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$.
   Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   Autre méthode :

   Comme $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ alors $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   Comme $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$, alors par minimalité de $\overline{A \cap B}$, on a $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

   (b) $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$.
   $\overline{A \cap B} = \emptyset$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Exercice 11.7

1. Soit $x, y \in \bar{A}$. Il existe deux suites d'éléments de A, (x_n) et (y_n) qui convergent vers x et y. Pour $\lambda \in [0,1]$, la suite $(\lambda x_n + (1-\lambda) y_n)$ d'éléments de A (car A est convexe) converge vers $\lambda x + (1-\lambda) y$. Cette limite est donc dans l'adhérence de A. On a montré que $\bar{A}$ est convexe.
2. C'est plus compliqué... on se donne x et y dans l'intérieur de A et on choisi $r > 0$ tel que $B(x, r)$ et $B(y, r)$ sont dans A. Par convexité de A, on montre que tout le « tube » qui relie ces deux boules est encore dans A : soit $z \in [x, y]$ et $\lambda \in [0,1]$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda) y$. On se donne un vecteur de $B(z, r)$ qu'on écrit sous la forme $z + t$ avec $\|t\| < r$. On considère les vecteurs $x' = x + t$ et $y' = y + t$ qui sont dans les boules $B(x, r)$ et $B(y, r)$ donc dans A. Alors $\lambda x' + (1-\lambda) y' = \lambda x + (1-\lambda) y + t = z + t$, et $z + t \in A$ par convexité. On a montré que $B(z, r) \subset A$ et z est intérieur à A.

Exercice 11.8

1. Soit $x \in E$, alors le vecteur $y = \frac{x}{\|x\|} \frac{r}{2}$ est dans $B(0, r)$ donc dans F. Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, le vecteur $\frac{2\|x\|}{r} y = x$ est dans F. Ainsi $E \subset F$. On en déduit que $E = F$. Plus généralement si F est un sous-espace vectoriel de E qui contient une boule ouverte $B(x, r)$, on montrer d'une manière semblable que $E = F$.
2. Soit $x, y \in \bar{F}$. Ces vecteurs sont des limites de suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de F. Si $lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n + \lambda y_n = x + \lambda y$, si bien que $x + \lambda y \in \bar{F}$ (puisque la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite du sous-espace vectoriel F).
3. On a que $\bar{F}$ est un sous-espace de E qui contient F. Si $\bar{F} \neq F$ alors $\bar{F}$ contient un vecteur en dehors de F donc $\bar{F} = E$.
4. Soit $e_1, \ldots, e_p$ une base de F. Soit (x_n) une suite d'éléments de F qui converge vers $a \in F$. On peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \sum\limits_{k=1}^{p} x_n^{(k)} e_k$. Le soucis c'est que la norme qu'on utilise n'est pas directement liée aux coordonnées, si bien qu'on ne peut rien dire sur la limite. Pour cela, on doit se placer en dimension finie. Supposons que $a \notin F$. Considérons $G = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p, a)$. Cet espace est de dimension finie et toutes les normes

sur G sont équivalentes. On peut notamment utiliser la normé infinie sur les coordonnées (notée $\|\|_\infty$), équivalente à la norme induite par la norme de départ. On écrit $x_n = \sum_{k=1}^{p} x_n^{(k)} e_k + 0.a$. Cette suite converge vers $1.a$. Or $\|x_n - a\|_\infty \geqslant 1$ (coordonnée sur a), ce qui est en contradiction avec la convergence de (x_n) vers a. En conclusion, l'hypothèse $a \notin F$ est impossible. Le sous-espace F de dimension finie est donc fermé.

Exercice 11.9

1. L'application $M \mapsto M - {}^tM$ est continue de E dans E. Ainsi l'image réciproque du fermé $\{0_E\}$ est un fermé de E. Cet ensemble est $S_n(\mathbb{R})$.
2. On a ${}^tB = -B$. Ainsi $({}^tB)^{2n} = {}^t(B^{2n}) = B^{2n}$. Par continuité de la transposition, on obtient en limite ${}^tC = C$. De même ${}^t(B^{2n+1}) = -B^{2n+1}$, d'où, en limite, ${}^tC = -C$. Finalement $C = 0$.

Exercice 11.10

L'équation admet deux racines distinctes si et seulement si $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. On en déduit que

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0 \text{ et } b^2 - 4ac > 0\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0\} \cap \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, b^2 - 4ac > 0\}.$$

Les applications $f : (a,b,c) \mapsto a$ et $g : (a,b,c) \mapsto b^2 - 4ac$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$ et $F = f^{-1}(\mathbb{R}^*) \cap g^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est l'intersection de deux ouverts (chacun comme image réciproque d'un ouvert par une application continue) est un ouvert.

Exercice 11.11

1. On prouve les différents points :
   → existence : la fonction $t \mapsto x + ty$ est continue sur $[0,1]$ et est donc bornée. Cela donne l'existence de $N((x,y))$
   → positivité : immédiat
   → caractère défini : si $N((x,y)) = 0$ alors pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant |x + ty| \leqslant 0$. Ainsi la fonction affine $t \mapsto x + ty$ est nulle est $x = y = 0$ (on peut prendre des valeurs pour t, par exemple 0 et 1).
   → homogénéité : si $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\sup_{t\in[0,1]} |\lambda x + t\lambda y| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda||x + ty| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |x + ty|,$$
   puisque $|\lambda| \geqslant 0$.
   → inégalité triangulaire : soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a
   $$|(x + x') + t(y + y')| \leqslant |x + ty| + |x' + ty'| \leqslant N((x,y)) + N((x',y')).$$
   Cela étant valable pour tout $t \in [0,1]$, on a bien $N((x,y) + (x',y')) \leqslant N((x,y)) + N((x',y'))$.
   L'application est bien une norme.
2. On détermine la boule fermée (plus facile avec les bornes supérieures) unitée. On a $N((x,y)) \leqslant 1$ si et seulement si, pour tout $t \in [0,1]$, $|x+ty| \leqslant 1$. Les valeurs extrêmes de $x + ty$ sont en 0 et 1 si bien que $N((x,y)) = \max(|x|, |x + y|)$. Ainsi (x,y) est dans la boule fermée unitée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ et $|x + y| \leqslant 1$. On trace les bords du domaine $x = \pm 1$ et $x + y = \pm 1$. La boule est à l'intérieur.
3. Pour se donner une idée des constantes, on essaie de placer les différentes boules unitées les unes dans les autres. Si on a deux normes N_1 et N_2 : la relation $N_1 \leqslant \alpha N_2$ donne que $\overline{B}_{N_2}(0,1) \subset \overline{B}_{N_1}(0,\alpha)$ et réciproquement. On cherche le plus petit $\alpha > 0$ tel que $\overline{B}_{N_2}(0,1) \subset \overline{B}_{N_1}(0,\alpha)$ ce qui donnera la meilleure constante telle que $N_1 \leqslant N_2$. Il n'y a alors plus qu'à le démontrer...

Exercice 11.12

1. On introduit $\Phi : (f,g) \in E^2 \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$. Il est clair que Φ est une forme bilinéaire symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Soit f un élément de E tel que $\Phi(f,f) = 0$. On a alors $\Phi(f,f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'^2(t)\,dt = 0$. Cela donne $f(0) = 0$ et, puisque f'^2 est continue et positive sur $[0,1]$, $f' = 0$. Ainsi f est constante, et donc nulle puisque $f(0) = 0$. Ainsi, Φ est un produit scalaire et N est la norme euclidienne associée.
2. On écrit que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)\,du$, ce qui donne
   $$\left|f(t)\right| \leq \left|f(0)\right| + \int_0^t \left|f'(u)\right| du \leqslant \left|f(0)\right| + \int_0^1 \left|f'(u)\right| du.$$
   On sait que pour a et b réels, on a $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, et on en déduit que $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$. Il vient alors
   $$\left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)^2 \leqslant 2\left(|f(0)|^2 + \left(\int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)^2\right).$$
   D'autre part on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
   $$\left(\int_0^1 |f'(t)|\,dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 dt \cdot \int_0^1 f'(t)^2\,dt = \int_0^1 f'(t)^2\,dt.$$
   D'où $\left|f(0)\right| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\left|f(0)\right|^2 + \int_0^1 \left|f'(t)\right|^2 dt}$, et donc pour tout $t \in [0,1]$ $\left|f(t)\right| \leqslant \sqrt{2}N(f)$, d'où $\left\|f\right\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f)$.

3. Utilisons la suite de fonctions de l'énoncé : pour $n \geqslant 1$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = \dfrac{n}{\sqrt{2n-1}}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \dfrac{n}{\sqrt{2n-1}} = +\infty$. Les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 11.13

1. On a évidemment l'existence et la positivité. L'homogénéité se fait facilement ainsi que l'inégalité triangulaire. Si $N_Z(P)$ est nul alors P admet $n+1$ racines distinctes donc P est le polynôme nul. L'application N_Z est bien une norme.
2. l'espace étant de dimension finie, les normes sont équivalentes.
3. On doit dire des choses sur les valeurs en les points de Z' alors qu'on peut dire des choses sur celles en Z. On va utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange en les points de Z.
   - → On note $L_k = \prod\limits_{i\neq k} \dfrac{X - z_i}{z_k - z_i}$ pour $k \in [\![0;n]\!]$
   - → Si $P \in \mathbb{C}_n[X]$ alors $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(z_k)L_k$
   - → On en déduit que $P(z'_j) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(z_k)L_k(z'_j)$ et $|P(z'_j)| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} |P(z_k)||L_k(z'_j)|$.
   - → Finalement

$$N_{Z'}(P) \leqslant \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} |P(z_k)||L_k(z'_j)| = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |P(z_k)||L_k(z'_j)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |P(z_k)| \max_{k\in[\![0;n]\!]} \left(\sum_{j=0}^{n} |L_k(z'_j)|\right) = \max_{k\in[\![0;n]\!]} \left(\sum_{j=0}^{n} |L_k(z'_j)|\right) N_Z(P)$$

Exercice 11.14

Supposons qu'il existe $x \in E$, non nul, tel que $N_1(x) < N_2(x)$. On note $y = x/N_2(x)$. On a alors $N_1(y) < N_2(y) = 1$ donc $y \in B_1 = B_2$ d'où $N_2(y) < 1$ ce qui donne une contradiction. On fait de même si $N_2(x) < N_1(x)$.

Exercice 11.15

1. Pour la première norme, c'est du cours. La norme N est bien définie (la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est bornée) et positive. Si $N(u) = 0$ alors la suite u est constante. Puisque $u_0 = 0$, la suite est nulle. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se montrent de façon standard.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 2N_\infty(u)$, donc $N(u) \leqslant 2N_\infty(u)$.
3. On cherche à montrer que N_∞/N n'est pas bornée : par exemple un cherche une suite de suites $(u^{(k)})$ telle que $N(u^{(k)}) = 1$ et $N_\infty(u^{(k)})$ tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$. On considère la suite $u^{(k)}$ telle que $u_n^{(k)} = n$ si $n \leqslant k$ et $u_n^{(k)} = k$ si $n \geqslant k$ (elle monte de 1 en 1 et s'arrête au rang k). Alors $N(u^{(k)}) = 1$ et $N_\infty(u^{(k)}) = k$, si bien que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{N_\infty(u^{(k)})}{N(u^{(k)})} = +\infty$. Les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 11.16

1. On propose deux méthodes :
   - → l'inégalité est vraie si l'un des réels est nul. On suppose que les deux sont strictement positifs. On écrit alors
   $$\alpha\beta = (\alpha^p)^{1/p}(\beta^q)^{1/q}.$$
   En prenant le logarithme, on a
   $$\ln(\alpha\beta) = \frac{1}{p}\ln(\alpha^p) + \frac{1}{q}\ln(\beta^q).$$
   Puisque la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec des termes positifs), on a
   $$\ln\left(\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(\alpha^p) + \frac{1}{q}\ln(\beta^q).$$
   Cela donne le résultat par composition par la fonction croissante exponentielle.
   - → on fixe $\beta > 0$. On pose $f(\alpha) = \alpha\beta - \dfrac{\alpha^p}{p}$ pour $\alpha \geqslant 0$. La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(\alpha) = \beta - \alpha^{p-1}$. La fonction est nulle en 0, de limite $-\infty$ en $+\infty$ et possède un maximum global lorsque $\alpha = \beta^{\frac{1}{p-1}}$. On calcule la valeur en ce point :
   $$f(\beta^{\frac{1}{p-1}}) = \beta^{1+\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{p}\beta^{\frac{p}{p-1}} = \beta^{\frac{p}{p-1}}(1 - \frac{1}{p}) = \frac{1}{q}\beta^q.$$
2. On se place dans le cas indiqué. Pour tout $t \in [a, b]$, on a
   $$|f(t)||g(t)| \leqslant \frac{1}{p}|f(t)|^p + \frac{1}{q}|g(t)|^q.$$
   En intégrant entre a et b, on obtient
   $$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)||g(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

De le cas général, on note $I_1 = \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ et $I_2 = \left(\int_a^b |g(t)|^q\,dt\right)^{1/q}$. Si l'une de ces intégrales est nulle, alors la fonction correspondante est nulle et l'inégalité est vraie. Sinon on considère $\tilde{f} = \dfrac{f}{I_1}$. On a

$$\int_a^b |\tilde{f}(t)|^p\,dt = \frac{1}{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^p\,dt}.\int_a^b |f(t)|^p\,dt = 1.$$

On a le même résultat pour la fonction $\tilde{g} = g/I_2$. On applique le résultat précédent, ce qui donne

$$\left|\int_a^b \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)\,dt\right| = \frac{1}{I_1 I_2}\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant 1,$$

ce qui donne $\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant I_1 I_2$, c'est-à-dire le résultat.

3. On utilise l'écriture conseillée, on obtient alors

$$\int_a^b |f+g|^p \leqslant \int_a^b |f|.|f+g|^{p-1} + \int_a^b |g|.|f+g|^{p-1}.$$

On applique l'inégalité de Hölder à chacune des deux intégrales. La première donne

$$\int_a^b |f|.|f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^{(p-1)q}\,dt\right)^{1/q}.$$

Puisque $1/p + 1/q = 1$, soit $pq = p+q$, on a $(p-1)q = pq - q = p$. Cela donne la majoration

$$\int_a^b |f|.|f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1/q}.$$

De même,

$$\int_a^b |g|.|f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1/q},$$

ce qui donne en ajoutant,

$$\int_a^b |f+g|^p \leqslant \left(\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}\right)\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/q}.$$

Si $\int_a^b |f+g|^p = 0$ l'inégalité cherchée est vraie, sinon, on peut diviser par $\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/q}$, ce qui donne, en utilisant $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, la relation.

4. L'application est bien définie et positive. L'homogénéité est immédiate. Si $\int_a^b |f|^p = 0$, puisque $|f|$ est continue et positive, alors f est nulle. L'inégalité triangulaire est prouvée au dessus.

Exercice 11.17

1. cf cours.
2. En appliquant la relation à la matrice PA, on obtient $\|AP\| = \|PA\|$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les applications $M \mapsto \|M\|$ et $M \mapsto AM$ sont continues sur E. On en déduit que $M \mapsto \|MA\|$ est continue sur E. De même $M \mapsto \|AM\|$ est continue sur E. Ces deux applications sont égales sur un ensemble dense et continues, elles sont donc égales sur E.
3. Si $i \neq j$, $E_{ij} = E_{ij}E_{jj}$. On doit alors avoir $\|E_{ij}\| = \|E_{ij}E_{jj}\| = \|E_{jj}E_{ij}\| = \|0_E\| = 0$. C'est impossible.

Exercice 11.18

1. Soit $d = d(x,F)$. Il existe une suite de vecteurs (y_n) de F telle que $d \leqslant \|x - y_n\| \leqslant d + \dfrac{1}{n+1}$ (par exemple). On a $\|y_n\| \leqslant \|y_n - x\| + \|x\| \leqslant d + 1 + \|x\|$. La suite est donc bornée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\|y_n\| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons $A = F \cap B_f(0,M)$: c'est une partie fermée et bornée du sous-espace vectoriel de dimension finie F : c'est donc une partie compacte de F. On peut donc extraire (à l'aide d'une extractrice φ) une suite convergente dans F de la suite (y_n). Si y est la limite de cette suite convergente, par continuité de la norme, on a $\lim_{n\to+\infty} \|x - y_{\varphi(n)}\| = \|x - y\| = d$.
2. Soit $u \notin F$. Si on a $d(u,F) = 0$, alors il existe $y \in F$ tel que $d(u,F) = 0 = \|u - y\|$ si bien que $u \in F$. Ainsi $d = d(u,F) > 0$. On montre, par propriété des bornes inférieures, que, si $\lambda \geqslant 0$, alors $d(\lambda u, F) = \lambda d(u,F)$: d'une part $\|u - f\| \geqslant d(u,F)$ pour tout $f \in F$. Cela donne, pour tout $y' \in F$, $\|\lambda u - f'\| = \lambda\|u - f'/\lambda\| \geqslant \lambda d(u,F)$. D'autre part, si $y \in F$ vérifie $d(u,F) = \|u - y\|$, alors $d(\lambda u, F) \leqslant \|\lambda u - \lambda y\| = \lambda\|u - y\| = \lambda d(u,F)$. Cela montre la seconde inégalité. On pose $d = d(u,F) > 0$, alors, si $v = u/d$, on a $d(v,F) = \dfrac{d}{d} = 1$. Il existe $y \in F$ tel que $d(v,F) = 1 = \|v - y\|$. Par translation, si $w = v - y$, alors $d(w,F) = d(v,F) = 1$ et $\|w\| = 1$. On a donc construit un vecteur qui satisfait aux conditions demandées.
3. Soit u_0 un vecteur unitaire et $F_0 = \mathrm{Vect}(u_0)$. On construit de proche en proche des vecteurs u_k distants d'au moins 1 de tous les précédents. Soit n un entier pour lequel on a construit $u_0, \dots, u_n$ deux à deux distants d'au moins 1 et $F_n = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n)$. Il existe un vecteur u_{n+1} de norme 1 tel que $d(u_{n+1}, F_n) = 1$ puisque $F_n \neq E$ (F_n est de dimension fninie, pas E). Ainsi, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\|u_k - u_{n+1}\| \geqslant d(u_{n+1}, F_n) = 1$. Par récurrence, on a construit une suite de vecteurs unitaires distants deux à deux d'au moins 1.

4. La suite construite précédemment n'a pas de suite extraite convergente puisque $\|u_p - u_q\| \geqslant 1$ si $p \neq q$. Si E est de dimension infinie, la boule unité de E n'est pas compacte.

Exercice 11.19

On écrit $z_n = r_n e^{i\theta_n}$. On a alors $z_{n+1} = r_n\left(\frac{e^{i\theta_n}+1}{2}\right) = r_n e^{i\theta_n/2}\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$. On obtient les relations $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$ et $r_{n+1} = r_n\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$. On obtient facilement $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ et

$$r_n = r_0\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = r_0\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(\theta_0/2^{k-1})}{2\sin(\theta_0/2^k)} = r_0\frac{\sin(\theta_0)}{2^n\sin(\theta_0/2^n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} r_0\frac{\sin\theta_0}{2^n\theta_0/2^n}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = r_0\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$.

Exercice 11.20

1. Pour $n \geqslant 1$, on a $u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$. On montre alors l'inégalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On a $0 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1$.
3. Avec la relation de récurrence, $u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$, on obtient $u_n \leqslant \sqrt{n+n-1} = \sqrt{2n-1}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n} = 0$ par majoration
4. De nouveau avec $u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$ et la question précédente qui indique que $u_n = o(n)$, on obtient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$. On a alors

$$u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{u_{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Exercice 11.21

→ Pour prouver les variations des suites on se rend compte qu'on a besoin de la position relative de u_n et v_n. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont strictement positifs.

→ si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n - 2\sqrt{u_n v_n} + v_n\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2 \geqslant 0$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geqslant u_n$. C'est également vrai pour les termes au rang 0.

→ On a alors $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{v_n}{u_n}} \geqslant 1$. La suite u est croissante et la suite v décroissante.

→ Il n'est pas immédiat de montrer que la différence tend vers 0 (c'est quand même faisable). En revanche, (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc converge vers une limite ℓ' et (u_n) est croissante majorée par v_0 donc converge vers une limite ℓ. La relation $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ donne en limite $\ell = \frac{\ell+\ell'}{2}$ d'où $\ell = \ell'$.

Conclusion : les deux suites convergent vers une même limite.

Exercice 11.22

1. On a $P_n'(x) = nx^{n-1} + 1$ et P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Puisque $P_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = +\infty$, on en déduit l'existence d'une unique racine positive x_n. On remarque également que $P_n(1) = 2-1 = 1$, on a donc $x_n \in]0,1[$.
2. On a $P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 < x_n^n - x_n + 1 = 0$. Ainsi $P_{n+1}(x_n) < 0$ et $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Par croissance de P_{n+1}, on obtient $x_n < x_{n+1}$ et la suite (x_n) est strictement croissante. Puisqu'elle est majorée par 1, elle converge vers $\ell \in]0,1]$. Supposons $\ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant \ell$ et $x_n^n \leqslant \ell^n$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Puisque $P_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un passage à la limite donne $0 + \ell - 1 = 0$ et une contradiction. On en déduit que $\ell = 1$.

Exercice 11.23

1. On montre les proposition par récurrence
2. On cherche des solutions sous la forme r^n. Une telle suite (r^n), avec $r \neq 0$, est solution si et seulement si $r^2 = r+1$. Cela donne $r = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Il existe donc α et β tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. On détermine alors α et β avec u_0 et u_1 :

$$\alpha + \beta = 1 \text{ et } \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

Cela donne $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ et $\beta = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

3. On a $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1,0[$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. (a) On a $v_2 = 2$ et ainsi $v_2 \geqslant v_1 \geqslant v_0$. On montre par récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$: « pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $v_{k+1} \geqslant v_k$ ». La propriété est vraie aux rangs 0 et 1. Si elle est vraie à un rang $n \geqslant 1$, alors
$$v_{n+2} - v_{n+1} = v_{n+1}^{\alpha} - v_{n-1}^{\alpha}$$
or $v_{n+1} \geqslant v_n \geqslant v_{n-1} > 0$ et la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $v_{n+2} \geqslant v_{n+1}$. Par récurrence, on obtient le résultat.
   (b) Une éventuelle limite vérifie $\ell = 2\ell^{\alpha}$ d'où $\ell^{1-\alpha} = 2$ et $\ell = 2^{1/(1-\alpha)}$.
   (c) si $\alpha \in]0,1[$ alors $1/(1-\alpha) > 1$ et $\ell > 2$. On montre par récurrence que $v_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour les rangs $0, 1$ (et 2). Si pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a v_n et v_{n+1} inférieurs à ℓ alors $v_{n+2} \leqslant 2\ell^{\alpha} = \ell$. La suite est croissante, majorée par ℓ et converge. la seule limite possible étant ℓ, elle converge vers ℓ.
   (d) Si $\alpha > 1$ alors $1/(1-\alpha) < 0$ et $\ell < 1$. La suite étant croissante, si elle convergeait, elle le ferait vers $\ell \geqslant v_2 = 2$. La suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 11.24

→ Soit $f : x \mapsto e^x + x$. On montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Cela donne l'existence et l'unicité du réel x_n, avec, de plus, $x_n = f^{-1}(n)$ (relation importante - on trouve plein de propriétés avec elle). Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ (bijection réciproque de f qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. On peut également montrer, puisque f et donc f^{-1} sont croissantes, que (x_n) est croissante (par vraiment utile mais bon).

→ Puisque x_n est de limite infini et que $x = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\, e^x$, on a $n = e^{x_n} + x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{x_n}$. Les limites étant infinies, on peut composer par le logarithme, si bien que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

→ On écrit $x_n = \ln n + y_n$ avec $y_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}} \ln n$. On reporte dans l'équation. Cela donne
$$e^{\ln n + y_n} + \ln n + y_n = n = ne^{y_n} + \ln n + y_n.$$
On a donc $n(1-e^{y_n}) = \ln n + y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et $1 - e^{y_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$, de limite nulle. Cela donne d'une part le fait que y_n tend vers 0, puis $1 - e^{y_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -y_n$. Finalement $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln n}{n}$.

→ On recommence avec $x_n = \ln n - \dfrac{\ln n}{n} + z_n$ avec $z_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$... mais ça devient pénible. On trouve $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

On peut aussi transformer l'équation en $x_n = \ln(n - x_n)$ et effectuer le même genre de calculs, mais cette fois en un peu plus simple

Exercice 11.25

On s'intéresse à $v_n = \ln u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k\ln\left(1+\dfrac{2}{k}\right)$. On reconnaît une moyenne de Cesàro. Le terme $k\ln\left(1+\dfrac{2}{k}\right)$ tend vers 2 lorsque k tend vers $+\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$ ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$.

Exercice 11.27

La suite étant bornée, elle admet une valeur d'adhérence ℓ, avec $u_{\varphi(n)}$ de limite ℓ. En reportant dans la relation, on obtient que $u_{2\varphi(n)}$ tend vers $2(1-\ell)$. Ainsi, si ℓ est valeur d'adhérence de la suite, alors $2(1-\ell)$ est encore valeur d'adhérence de cette suite. Cela va nous donner plusieurs valeurs d'adhérence. Étudions cela... soit $u_0 = \ell$ et $u_{n+1} = 2(1-u_n)$. Le point fixe est $2/3$, on se ramène, en posant $w_n = u_n - 2/3$, à $w_{n+1} = -2w_n$. Ainsi w_n et u_n divergent, sauf si $w_0 = 0$. Puisque les valeurs d'adhérence sont bornées (hypothèse de départ), on obtient une contradiction - sauf si $\ell = 2/3$. Finalement la suite (u_n) admet une unique valeur d'adhérence $2/3$. Puisque u_n est bornée, elle se trouve dans un compact. Une suite d'un compact avec une unique valeur d'adhérence converge vers cette unique valeur d'adhérence.

Exercice 11.28

1. (a) Puisque G n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un élément non nul dans G. Si cet élément $x \in G$ est strictement négatif alors $-x \in G$ et ainsi G contient un élément strictement positif. Ainsi $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide, minoré par 0 et admet une borne inférieure.
   (b) Supposons que $a \notin G$. Il existe un élément $b \in]a, 2a[$ et $b \in G$. Puisque $b > a$, il existe un élément $c \in a, b[$ avec $c \in G$. Alors $b - c \in G$, $b - c > 0$ et $b - c < 2a - a = a$. Cela contredit la définition de a. Finalement $a \in G$. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n.a \in G$ et par symétrie, $a\mathbb{Z} \subset G$. réciproquemet, soit $x \in G$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$. Alors $x - na \in G$ et $0 \leqslant x - na < a$. Ainsi $x - na = 0$ et $x \in a\mathbb{Z}$.
   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in G$ et $y \in]0, \varepsilon[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \leqslant x < (n+1)y$. Alors $z = ny \in G$ et $|x - z| < \varepsilon$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, il existe $z \in G$ tel que $|x - z| < \varepsilon$. Aindi G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. On considère $G = \theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \left\{n\theta + 2m\pi, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Supposons qu'il est discret, sous la forme $a\mathbb{Z}$. Il existe alors $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = k_1 a$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi = k_2 a$. Alors $\dfrac{\theta}{\pi} = 2\dfrac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. Le sous-groupe G est donc dense dans $\mathbb{R}$. De plus $\sin(n\theta + 2m\pi) = \sin(n\theta)$ si bien que $\left\{\sin(n\theta + 2m\pi), (n, m) \in \mathbb{Z}^2\right\} = \{\sin(n\theta), n \in \mathbb{Z}\}$. Puisque G est dense dans $\mathbb{R}$, $\sin(G)$ est dense dans $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Le principe : on fixe x et $\varepsilon > 0$, on choisit n_0 tel que $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$ si $n \geqslant n_0$, on descend sous x puis on remonte jusqu'à redépasser x pour la première fois... soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ et n_0 comme au dessus. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} - v_p < x$ puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n_0} - v_p = -\infty$. On considère alors la suite $(u_n - v_p)_{n \geqslant n_0}$. Cette suite diverge vers $+\infty$. Considérons le premier entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que $z = u_{n_1+1} - v_p > x$ et soit $y = u_{n_1} - v_p$. On a $y \leqslant x < z$ et $|z - y| = |u_{n_1+1} - u_{n_1}| < \varepsilon$. On a bien trouvé un élément de $h \in H$ tel que $|x - h| < \varepsilon$. L'ensemble est dense dans $\mathbb{R}$.
4. On applique alors le même principe qu'au dessus avec $u_n = \pi\sqrt{n}$ et $v_p = 2p\pi$ (on a bien $u_{n+1} - u_n$ de limite nulle).

Exercice 11.29

1. Soit $a+b \in A+B$, avec $a \in A$ et $b \in B$. Puisque $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$. On montre que $B(a+b,r) \subset A+B$. En effet, si $x \in B(a+b,r)$, alors il s'écrit $x = a+b+z$ avec $\|z\| < r$. Le vecteur $a+z \in B(a,r)$, donc dans A. Ainsi $(a+z)+b \in A+B$ et $B(a+b,r) \subset A+B$.
2. Soit $z_n = a_n + b_n$ une suite d'éléments de $A+B$ avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$. On extrait de la suite (a_n) une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ (vers $\ell_1 \in A$). La suite $(b_{\varphi(n)})$ est une suite du compact B, on peut en extraire une suite $(b_{\varphi(\psi(n))})$ convergente vers $\ell_2 \in B$. La suite $(a_{\varphi(\psi(n))})$ converge toujours vers ℓ_1 (suite extraite). Finalement la suite $(z_{\varphi(psi(n))})$ converge vers $\ell_1 + \ell_2 \in A+B$. La partie $A+B$ est compacte.
3. Soit $z_n = a_n + b_n$ une suite d'éléments de $A+B$ qui converge vers ℓ (toujours avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$). On doit montrer que ℓ reste dans $A+B$. De la suite (a_n), on extrait une suite $a_{\varphi(n)}$ convergente vers $\ell_1 \in A$. La suite $b_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$ converge vers $\ell - \ell_1 = \ell_2$, mais puisque B est une partie fermée, cette limite ℓ_2 est dans B. La suite $z_{\varphi(n)}$ converge donc vers $\ell_1 + \ell_2 \in A+B$, mais également vers ℓ. Par unicité, on en déduit que $\ell \in A+B$. La partie $A+B$ est bien fermée.
4. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = xy$. Cette application est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc $f^{-1}(\{1\})$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. La partie A est l'intersection de cette partie fermée avec le fermé $(\mathbb{R}^+)^2$. Pour B c'est plus simple : c'est un produit de deux fermés. L'ensemble $A+B$ est l'ensemble des couples sous la forme $(x, \frac{1}{x} - y)$ où $x > 0$ et $y \geqslant 0$. On a donc $A+B = \{(x,y), x>0, y \leqslant \frac{1}{x}\}$ (la partie « sous la courbe »). Cette partie n'est pas fermée puisque la suite $(0, 1/n)$ d'éléments de $A+B$ converge vers $(0,0)$ qui n'est pas dans $(0,0)$.

Exercice 11.30

1. Soit M tel que $\|a\| \leqslant M$ pour tout $a \in A$. Pour tout $a, b \in A$, on a $\|a-b\| \leqslant 2M$. Ainsi $\{\|a-b\|, (a,b) \in A^2\}$ est non vide et majoré. Il admet une borne supérieure.
2. Puisque $A \subset \bar{A}$, on a $\delta(A) \leqslant \delta(\bar{A})$ (on a $\{\|a-b\|, (a,b) \in A^2\} \subset \{\|a-b\|, (a,b) \in \bar{A}^2\}$ d'où l'inégalité sur les bornes supérieures). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe a' et b' dans $\bar{(}A)$ tels que $\|a'-b'\| \geqslant \delta(\bar{A}) - \varepsilon$. Il existe $a \in A$ tel que $\|a-a'\| < \varepsilon$ et $b \in A$ tel que $\|b-b'\| \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, on a $\|a-b\| \geqslant \|a'-b'\| - 2\varepsilon \geqslant \delta(\bar{A}) - 3\varepsilon$. Ainsi $\delta(A) \geqslant \delta(\bar{A}) - 3\varepsilon$. Cela étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\delta(A) \geqslant \delta(\bar{A})$.
3. Il existe des suites (a_n) et (b_n) d'éléments de A telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|a_n - b_n\| = \delta(A)$. On extrait une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ de limite $a \in A$ et une suite extraite $(b_{\varphi(\psi(n))})$ de la suite $(b_{\varphi(n)})$ convergente vers $b \in A$. La suite de terme général $\|a_{\varphi(\psi(n))} - b_{\varphi(\psi(n))}\|$ converge vers $\delta(A)$ d'une part, et vers $\|a-b\|$ d'autre part (la norme est lipschitzienne donc continue). Par unicité de la limite, on a le résultat.
4. On suppose que $A \neq \emptyset$ (sinon la question n'a pas de sens). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A \subset A_n$ donc $\delta(A) \leqslant \delta(A_n)$ pour tout n. La suite $(\delta(A_n))$ est décroissante, minorée par 0 donc converge vers un réel d. On en déduit que $\delta(A) \leqslant d$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in A_n$ tels que $\delta(A_n) = \|a_n - b_n\|$. Par double extraction, on extrait $(a_\varphi(n))$ de limite a et $(b_\varphi(n))$ de limite b. On a alors $d = \|a-b\|$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $n \geqslant N$, alors $\varphi(n) \geqslant \varphi(N) \geqslant N$. Ainsi, pour $n \geqslant N$, $a_{\varphi(n)}$ est dans A_N (suite décroissante de compacts). Puisque A_N est fermé, la limite a est encore dans A_N. Puisque c'est le cas pour tout $N \in \mathbb{N}$, on en déduit que a est dans l'intersection A. On a le même résultat pour b. Finalement $a, b \in A$ et $d = \|a-b\| \leqslant \delta(A)$. On en déduit qu'il y a bien égalité.

Exercice 11.31

1. On a $\mathring{A} \subset \overline{A}$ et ainsi $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A} = \overline{A} \cap (E \backslash \mathring{A}) = \overline{A} \cap \overline{E \backslash A}$. On alors directement $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(E \backslash A)$.
2. On note $B = \overline{A}$. On a $\overline{B} = B$, $A \subset B$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. Ainsi $\mathrm{Fr}(B) = B \backslash \mathring{B} \subset B \backslash \mathring{A} = \mathrm{Fr}(A)$. Même principe avec $\mathring{A}$. Avec $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Fr}(A) = \mathbb{N}$ et $\mathrm{Fr}(\overline{A}) = \emptyset$. Avec $A = \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Fr}(A) = \mathbb{N}$ et $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) = \emptyset$.
3. Soit x dans la frontière de $A \cup B$. On a x adhérent à $A \cup B$. Il existe une suite (x_n) d'éléments de $A \cup B$ qui converge vers x. Il existe φ une extractrice telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} \in A$ ou pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} \in B$ (sinon il n'y aurait qu'un nombre fini d'indices tels que $x_n \in A \cup B$).

   Supposons que ce soit le cas pour A, alors $x \in \overline{A}$. De plus $x \notin \widehat{\mathring{A \cup B}}$. Puisque $\mathring{A} \subset \widehat{\mathring{A \cup B}}$, on a bien $x \notin \mathring{A}$ et finalement $x \in \mathrm{Fr}(A)$. On fait de même si on avait $x \in \overline{B}$. Finalement $x \in \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$.

   Avec $A = [0,2]$ et $B = [1,3]$, on a $\mathrm{Fr}(A \cup B) = \{0,3\}$ et $\mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B) = \{0,1,2,3\}$.

Exercice 11.32

On commence par remarque que si $f \in E$, alors $|f|$ est intégrable sur $]0,1[$: en effet, soit $[a,b] \subset]0,1[$, on a $\left(\int_a^b 1.|f|\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b 1\right)\left(\int_a^b f^2\right) \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)$, soit $\int_a^b 1.|f| \leqslant \|f\|_2$. Cela étant vrai pour tout segment de $]0,1[$, on en déduit que f est intégrable sur $]0,1[$ et que $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$.

→ ouvert : Soit $f_0 \in F$ et $r = 1 - \int_0^1 |f| > 0$. Si $\|g\|_2 < r$, alors $\int_0^1 |g| \leqslant \|g\|_2 < r$ et $\int_0^1 |f_0 + g| \leqslant \int_0^1 |f_0| + \int_0^1 |g| < 1$. Ainsi $B(f_0, r) \subset F$. et F est un ouvert. On peut le montrer autrement : l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 |f| \end{array} \right.$$

est continue sur E car 1-lipschitzienne (majoration $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|_2$ obtenue précédemment). Puisque $F = \varphi^{(-1)}(]-\infty, 1[)$, alors F est un ouvert.

→ convexe : soit f, g dans F et $\lambda \in]0,1[$ (ainsi λ et $1-\lambda$ sont strictement positifs), alors

$$\int_0^1 |\lambda f + (1-\lambda) g| \leqslant \lambda \int_0^1 |f| + (1-\lambda) \int_0^1 |g| < \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

L'ensemble est convexe.

→ borné : la fonction f^2 peut être beaucoup plus grande que f. Soit $f(x)=nx^n$. Alors $\int_0^1 |f| = \dfrac{n}{n+1} < 1$ et $\int_0^1 f^2 = \dfrac{n^2}{2n+1}$ si bien que $\|f\|_2$ peut être aussi grand qu'on veut. L'ensemble F n'est pas borné.

Exercice 11.33

On essaie de trouver un lien avec le produit scalaire. On sait que la famille (x,y) est liée si et seulement si $\left(\langle x,y\rangle\right)^2 = \|x\|^2\,\|y\|^2$. Le complémentaire de Ω est donc l'ensemble des couples (x,y) vérifiant cette propriété. On considère alors l'application $\varphi : (x,y)\in E\times E \mapsto \left(\langle x,y\rangle\right)^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2$. Cette application est continue sur E^2 (on le munit de la norme infinie sur le produit) :

→ l'application $(x,y)\mapsto \langle x,y\rangle$ est bilinéaire et vérifie $\left|\langle x,y\rangle\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ donc continue. Les applications partielles $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont linéaires et continues sur $E\times E$ vers E (1-lipschitzienne) et les applications normes sont également continues car lipschitziennes. Par différence et composition par l'application carrée, φ est continue sur $E\times E$.

→ On a $E^2\backslash\Omega = \varphi^{-1}(\{0\})$ donc est une partie fermée de E^2.

Finalement Ω est un ouvert de E^2.

Exercice 11.34

1. Si f avait deux points fixes distincts x et y, alors $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$ et $\|f(x)-f(y)\| < \|x-y\|$. Cela donnerait $\|x-y\| < \|x-y\|$, ce qui est impossible.
2. L'application D est continue sur K, à valeurs positives. Elle admet alors un minimum qui est atteint (K est compact). Supposons que ce minimum ne soit pas nul. On le note m et il est atteint en x_0. On a $\|f(x_0)-x_0\| = m > 0$. Notamment $x_0 \neq f(x_0)$. La relation sur les normes donne $\|f(f(x_0)) - f(x_0)\| < \|f(x_0)-x_0\| = m$. Ainsi $D(f(x_0)) < D(x_0) = m$, ce qui est une contradiction. Finalement $m=0$ et il existe $a\in K$ tel que $f(a)=a$.
3. Soit $v_n = \|u_n - a\|$. On a $v_{n+1} = \|f(u_n)-a\| = \|f(u_n)-f(a)\| \leqslant v_n$ (strictement lorsque $u_n\neq a$, 0 sinon). Cette suite est décroissante et converge vers un réel ℓ. Supposons que $\ell>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\ell\leqslant v_n$. La suite (u_n) admet une suite extraite $(x_n) = (u_{\varphi(n)})$ convergente vers $x'\in K$. Cette suite vérifie également $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - a\| = \|x'-a\| = \ell > 0$. De plus, puisque $x_n\neq a$, on a $\|f(x_n)-f(a)\| = \|f(x_n)-a\| = \|u_{\varphi(n)+1} - a\| = v_{\varphi(n)+1}$. Par les différents résultats de continuité, cette dernière suite converge vers $\|f(x')-a\|$. Elle converge également vers $\ell>0$, ce qui permet d'écrire que $\|f(x')-f(a)\| = \|f(x')-a\| < \|x'-a\| = \ell$. On a une suite extraite de (v_n) - la suite $v_{\varphi(n)+1}$ - qui converge vers une limite strictement inférieure à ℓ, ce qui est une contradiction.

Exercice 11.35

1. voir cours.
2. Si $d(x,A)=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n\in A$ tel que $\|x-x_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Ainsi x est limite d'une suite d'élément de A, donc appartient à $\bar{A}$. Réciproquement, si $x\in\bar{A}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a alors $d(x,A)\leqslant \|x-x_n\|$, de limite nulle. Ainsi $d(x,A)=0$.
3. Il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_0 - k_n\| = d(x_0,K)$. De cette suite, on extrait une suite $(k_{\varphi(n)})$ convergente vers $a\in K$. Alors
$$\|x_0 - a\| = \lim_{n\to+\infty} \left\|x_0 - k_{\varphi(n)}\right\| = d(x_0,K).$$
4. Sous cette forme c'est faux : il faut considérer la boule fermée. L'ensemble $F\cap B_f(x_0,\|x_0-a\|)$ est intersection de deux fermés donc est fermé. Il est évidemment borné car $B_f(x_0,\|x_0-a\|)$ l'est. F étant de dimension finie, l'ensemble est compact. On peut donc utiliser la question précédente. On a F qui se décompose en $F_1 = F\cap B_f(x_0,\|x_0-a\|)$ et $F_2 = F\backslash F_1$. Si $y\in F_2$, alors $\left\|x_0-y\right\| \geqslant \|x_0-a\|$ donc $d(x_0,F_2)\geqslant \|x_0-a\|$. Ainsi $d(x_0,F) = d(x_0,F_1)$ (puisque $a\in F$, $d(x_0,F)\leqslant \|x_0-a\|$). Cette distance est atteinte en un point de F_1 d'après le début de la question.

Exercice 11.36

1. → Soit M un majorant de $(\left\|A^p\right\|)_{p\in\mathbb{N}}$. Pour tout $p\geqslant 1$, $\left\|B_p\right\| \leqslant \frac{1}{p}(M+\cdots+M) = M$ donc la suite (B_p) est bornée. L'espace étant de dimension finie, par Bolzano-Weierstrass, on sait qu'elle admet une valeur d'adhérence $B = \lim\limits_{p\to+\infty} B_{\varphi(p)}$.

   → Pour $p\geqslant 1$, $AB_{\varphi(p)} = B_{\varphi(p)}A$ donc, en passant à la limite, $BA = AB$. C'est bien possible car les applications $M\mapsto AM$ et $M\mapsto MA$ sont linéaires en dimension finie donc continues (ou elles sont polynomiales en les coefficients de M).

   → On a $AB_p = B_p - \dfrac{1}{p}\left(I_n - A^p\right)$, ce qui donne (pour les mêmes raisons qu'avant, en remplaçant p par $\varphi(p)$ et en passant à la limite) $AB = B$.

   → Enfin, on a $B\left(\frac{I_n + A + \cdots + A^{p-1}}{p}\right) = B$. Cela donne $BB_{\varphi(p)} = B$, et, en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient $B^2 = B$.
2. On a vu que $B(A-I_n)=0$ donc $\operatorname{Im}(A-I_n)\subset \ker B$. D'autre part, si $X\in\ker(A-I_n)$, alors pour tout $p\geqslant 1$, $A^pX = X$ donc $B_{\varphi(p)}X = X$ donc $BX = X$ en faisant tendre p vers $+\infty$ (et toujours par un argument de continuité, cette fois de l'application $M\mapsto MX$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$). En particulier, $\ker(A-I_n)\subset \operatorname{Im} B$. Le théorème du rang donne l'égalité des ensembles. En effet, on a $\dim\operatorname{Im}(A-I_n)\leqslant \dim\ker B$, $\dim\ker(A-I_n)\leqslant \dim\operatorname{Im} B$ et $\ker B$ et $\operatorname{Im} B$ sont supplémentaires (car $B^2=B$). Or $\dim\operatorname{Im}(A-I_n) + \dim\ker(A-I_n) = n = \dim\ker B + \dim\operatorname{Im} B$, d'où l'égalité des dimensions et donc des sous-espaces vectoriels.
3. La valeur d'adhérence B est donc unique (car B est le projecteur sur $\ker(A-I_n)$ de direction $\operatorname{Im}(A-I_n)$). La suite (B_n) est une suite du compact $B(0,M)$ de $M_n(\mathbb{R})$ qui n'admet qu'une valeur d'adhérence. Elle est donc convergente vers cette unique valeur d'adhérence.

Exercice 11.37

Soit F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang et $v \in \bar{F}$: il existe une suite $(u^{(p)})$ de suites de E telle que $\lim_{p\to+\infty}\left\|v-u^{(p)}\right\|_\infty = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left\|v-u^{(p_0)}\right\|_\infty < \varepsilon$. Notamment, si $u^{(p_0)}$ est nulle à partir du rang N, on a $|v_n| < \varepsilon$ lorsque $n \geqslant N$. La suite v est donc de limite nulle. Réciproquement, soit v une suite de limite nulle. On note $u^{(p)}$ la suite v tronquée au rang p (nulle à partir de l'indice $p+1$). Puisque v est de limite nulle, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p \geqslant N$, $|v_p| < \varepsilon$. Pour tout $p \geqslant N$, on a $\left\|v-u^{(p)}\right\|_\infty = \sup_{n>p}|v_n - u_n^{(p)}| = \sup_{n>p}|v_n| \leqslant \varepsilon$. On a bien prouvé que la suite $(u^{(p)})$ converge vers v pour la norme infinie. Ainsi $\bar{F}$ est l'ensemble des suites de limite nulle.

Exercice 11.38

1. → Tout d'abord f est injective : soit $x, y \in K$ tels que $f(x) = f(y)$. On alors $\|x-y\| = \|f(x)-f(y)\| = 0$, d'où $x = y$.
   → Il reste à montrer que f est surjective. Pour cela, soit $z \in K$, on va montrer que z est dans l'image de f. On note $x_n = f^n(z)$ (pour la composition). Il existe φ strictement croissante sur $\mathbb{N}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = y$. On a alors, en appliquant plusieurs fois l'égalité $\|f(x)-f(y\| = \|x-y\|$,
   $$\left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| = \left\|f^{\varphi(n+1)}(z) - f^{\varphi(n)}(z)\right\| = \left\|f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(z) - z\right\|.$$
   Cette suit de norme tend vers $\|y-y\| = 0$, donc z est limite d'une suite d'éléments de $f(K)$. Or $f(K)$ est compact (car f est continue puisque 1-lipschitzienne) donc fermé, si bien que $z \in f(K)$. Finalement f est surjective.
2. → On montre de la même façon que f est injective.
   → On va montrer que f est une isométrie, ce qui permettra de conclure avec la première question. Soit x et y dans K. On définit les suites $x_n = f^n(x)$ et $y_n = f^n(y)$. Il existe φ une extractrice telle que les deux suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ convergent (soit par double extraction, soit - ce qui revient finalement au même - par extraction de la suite (x_n, y_n) du compact $K \times K$). Comme précédemment on a
   $$\left\|x - f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x)\right\| \leqslant \left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\|,$$
   de limite nulle, si bien que la suite $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x_0))$ converge vers $x_0 = x$. On a le même résultat avec y. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n+1) - \varphi(n) \geqslant 1$, d'où
   $$\left\|x-y\right\| \leqslant \left\|f(x)-f(y)\right\| \leqslant \left\|f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x) - f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)\right\|.$$
   Or cette dernière suite converge vers $\|x-y\|$. Par encadrement, on a
   $$\left\|x-y\right\| \leqslant \left\|f(x)-f(y)\right\| \leqslant \left\|x-y\right\|.$$
   On est ramené à la question précédente.

Exercice 11.39

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A_p = A + \frac{1}{p} I_n$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Cette suite converge vers A. Les matrices A_p sont inversibles à partir d'un certain rang : $\det(A + xI_n)$ est un polynôme de degré exactement n qui admet au maximum n racines complexes.
2. On le montre lorsque A et B sont inversibles : on a $\mathrm{Com}(A) = \frac{1}{\det A}\,{}^tA^{-1}$. On a un résultat similaire pour B et AB. Cela donne
   $$\mathrm{Com}(AB) = \frac{1}{\det AB}\,{}^t(AB)^{-1} = \frac{1}{(\det A)(\det B)}\,{}^t(B^{-1}A^{-1}) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B).$$
   Pour A et B quelconques, on considère deux suites de matrices inversibles $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers A et B. Puisque Com est un polynôme en tous les coefficients de la matrice, l'application $M \mapsto \mathrm{Com}(M)$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$. On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Com}(A_pB_p) = \mathrm{Com}(A_p)\mathrm{Com}(B_p)$. Par continuité et passage à la limite, on obtient le résultat pour toutes les matrices.
3. voir cours.

Exercice 11.40

1. On montre que le complémentaire de F est ouvert (c'est plus simple ici). Soit $y \notin F$. Les termes de F sont proches de ℓ pour un grand nombre. Soit $\alpha = \frac{\|y-\ell\|}{2}$. Il existe un entier n_0 à partir duquel on a $\|u_n - \ell\| < \alpha$, et pour $n \geqslant n_0$, $\|y - u_n\| \geqslant \alpha$. En limite, on a également $\|y-\ell\| \geqslant \alpha$. On $d = \min_{n<n_0}\|u_n - y\|$. Ce minimum est atteint (nombre fini de termes) et n'est pas nul (sinon y serait l'un des u_n. On note enfin $r = \min(\alpha, d/2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|y-u_n\| \geqslant r$ et $\|y-\ell\| \geqslant r$. La boule $B(y,r)$ est donc dans le complémentaire de F (attention : les termes de la suite sans leur limite n'est pas un fermé - par exemple les termes de la suite $u_n = \frac{1}{n+1}$ ne forment pas une partie fermée car la suite converge vers 0, et la suite est une suite de termes de la suite...)
2. Soit G un fermé de E et $H = f(G)$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H, où $u_n = f(x_n)$, convergente vers ℓ. On doit montrer que $\ell \in H$. L'ensemble $F = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est fermé d'après la question précédente. De plus il est borné. C'est donc un compact de $\mathbb{R}$ et son image réciproque $f^{-1}(F)$ est compacte par hypothèse. La suite (x_n) est une suite de ce compact $f^{-1}(F)$. On peut donc en extraire une suite $x_{\varphi(n)}$, convergente vers x. Or cette suite est une suite d'éléments du fermé G donc la limite reste dans G. On a ainsi $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x$, et par continuité de f, $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x)$ avec $f(x) \in H = f(G)$. Or cette suite converge également vers ℓ, si bien que, par unicité de la limite, on a $\ell = f(x) \in H$. L'ensemble H est donc fermé.

Exercice 11.41

- → Soit $K = [-M, M]$ un compact. Son image réciproque est compacte, donc bornée : il existe $A > 0$ tel que $f^{-1}([-M, M]) \subset [-A, A]$. Or $x \in f^{-1}([-M, M])$ signifie $f(x) \in [-M, M]$. On a donc obtenu : $\forall M > 0, \exists A > 0$, $f(x) \in [-M, M]$ alors $x \in [-A, A]$. Par contraposée de la proposition finale, cela devient, $\forall M > 0, \exists A > 0$, $|x| \geqslant A$ entraîne $|f(x)| \geqslant M$. Cela traduit bien le fait que les deux limites sont infinies.
- → Réciproquement, supposons que les deux limites sont infinies. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Il est contenu dans un segment $[-M, M]$. Il existe $A_1 > 0$ tel que $x > A_1$ donne $|f(x)| \geqslant M$ et il existe $A_2 > 0$ tel que $x < -A_2$ donne $|f(x)| \geqslant M$. Pour $|x| \geqslant A = \max(A_1, A_2)$, on a $|f(x)| \geqslant M$. Ainsi $f^{-1}(K) \subset f^{-1}([-M, M]) \subset [-A, A]$. Puisque f est continue, l'image réciproque d'un fermé est encore un fermé. Finalement $f^{-1}(K)$ est fermé et borné donc compact.

Exercice 11.42

- → Si f est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$ pour tout x, y. Notamment $|f(x)| \leqslant K|x|$. Or $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas bornée au voisinage de 0. L'application f n'est donc pas lipschitzienne.
- → Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Si x et y sont dans $[1, +\infty[$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}|x - y| \leqslant |x - y|$. On va utiliser $\mathbb{R}^+ = [0, 2] \cup [1, +\infty[$. Si x et y sont à une distance d'au plus 1 l'un de l'autre, alors ils seront tous les deux dans le même intervalle $[0, 2]$ ou $[1, +\infty[$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, si x et y sont dans $[0, 2]$ avec $|x - y| < \alpha$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On peut toujours choisir $\alpha < 1$. Si x et y sont tous les deux supérieurs à 1, alors $|x - y| < \varepsilon$ entraine $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Avec $\beta = \min(\alpha, \varepsilon)$, si $|x - y| < \beta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dans toutes les situations.
  remarque : on doit bien faire chevaucher les deux intervalles afin de ne pas se retrouver dans une situation où x et y ne se situent pas tous les deux dans un même intervalle.

Exercice 11.43

1. Soit $(x_n, f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G_f convergente. En particulier la suite réelle (x_n) converge. Si $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, la continuité de f implique que la suite $(x_n, f(x_n))$ tend vers $(\ell, f(\ell)) \in G_f$ ce qui prouve que G_f est fermé.
2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et (x_n) une suite réelle quelconque tendant vers ℓ. Montrons que la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(\ell)$, ainsi f sera continue en ℓ. La suite $\big(f(x_n)\big)$ étant bornée par hypothèse, elle admet au moins une valeur d'adhérence $y = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)})$. La suite d'éléments de G_f $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers (ℓ, y) or G_f est fermé donc $(\ell, y) \in G_f$, ce qui s'écrit $y = f(\ell)$. La suite $\big(f(x_n)\big)$ admet donc pour unique valeur d'adhérence $f(\ell)$. Puisqu'elle est bornée, elle converge vers cette valeur (une suite d'un compact avec une unique valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence).
3. On peut par exemple considérer la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$ est un fermé mais f n'est pas continue.

Exercice 11.44

- → Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - y| < \alpha$ donne $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- → La suite $f(n\alpha)$ tend vers 0. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $|f(n\alpha)| < \varepsilon$.
- → Soit $x > n_0\alpha$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ supérieur à n_0 tel que $x \in [n\alpha, (n+1)\alpha[$. Ainsi $|f(x) - f(n\alpha)| < \varepsilon$ puisque $|x - n\alpha| < \alpha$. On obtient alors $|f(x)| \leqslant |f(x) - f(n\alpha)| + |f(n\alpha)| < 2\varepsilon$.
- → Pour tout $x > n_0\alpha$, $|f(x)| < 2\varepsilon$. On a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 11.45

On note $A = 1 + |f(0)|$. Si $\|x\| \geqslant \max(R, \frac{A}{x})$, alors $f(x) \geqslant A = 1 + |f(x_0)|$. On note $\alpha = \max(R, \frac{A}{x})$. Puisque f est continue sur E, alors f est bornée sur le compact $K = \bar{B}(0, \alpha)$ et ses bornes sont atteintes. Notons $m = \min\limits_K f(x)$ et $x_0 \in K$ tel que $m = f(x_0)$. On a $m <= f(0)$. Alors, pour tout $x \in K$, on a $f(x_0) = m \leqslant f(x)$, et pour tout $x \in E \backslash K$, $f(x) > 1 + |f(0)| > 1 + m > f(x_0)$. On en déduit que f admet un minimum atteint sur E.

Exercice 11.46

On commence par écrire, pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$F(x) - F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\big(\sin(xt) - \sin(yt)\big)\,dt.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on peut majorer $\big|\sin(xt) - \sin(yt)\big| \leqslant |xt - yt|$, mais t peut être grand et on ne sait pas si $t \mapsto tf(t)$ est intégrable. On va découper l'intégrale et « éliminer » les extrémités. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$ puisque $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f(t)|\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On peut trouver A' tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-A'} |f(t)|\,dt \leqslant \varepsilon$ On a alors, en découpant en plusieurs morceaux, (4 aux extrémités et le morceau central), et en majorant $|\sin|$ par 1,

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \int_{-A'}^{A} |tf(t)||x - y|\,dt + 4\varepsilon.$$

On note $K = \displaystyle\int_{-A'}^{A} |tf(t)|\,dt$. Dès que $|x - y| < \dfrac{\varepsilon}{K+1}$, on a $|F(x) - F(y)| < 5\varepsilon$. On a prouvé la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$.