

CHAPITRE 10 - CONVEXITÉ

Exercice 10.1

On cherche λ tel que $b = \lambda a + (1 - \lambda)c$. On trouve $\lambda = \frac{b-c}{a-c}$. On a alors $b = \frac{b-c}{a-c}a + \frac{a-b}{a-c}c$.

Exercice 10.2

- On note $\|M\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $M(x, y)$. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points de la boule et $\lambda \in [0, 1]$. On a $\|\lambda A + (1 - \lambda)B\| \leq |\lambda| \|A\| + |1 - \lambda| \|B\| \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1$.
- On doit justifier que l'inégalité reste stricte (attention lorsqu'on multiplie par 0). On a toujours $\|\lambda A + (1 - \lambda)B\| \leq |\lambda| \|A\| + |1 - \lambda| \|B\|$. Or l'un des réels λ ou $1 - \lambda$ est non nul donc l'inégalité reste stricte et $\|\lambda A + (1 - \lambda)B\| < \lambda + 1 - \lambda = 1$. On peut aussi supposer que $\lambda \in]0, 1[$ (les cas 0 et 1 sont immédiats) pour écrire directement $\|\lambda A + (1 - \lambda)B\| < \lambda + 1 - \lambda = 1$.

Exercice 10.3

- Si $\text{Epi}(f)$ est convexe. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. Le segment reliant $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est dans l'épigraphes de f . On note $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ et $t = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. On a $x \in I$ et (z, t) est dans l'épigraphes de f (barycentre de (A, λ) et $(B, 1 - \lambda)$ où A à pour coordonnées $(x, f(x))$ et B $(y, f(y))$). On a donc $t \geq f(z)$ ce qui correspond à la définition de la convexité de f .
- Si f est convexe. Soient $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ deux points de $\text{Epi}(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$. On note $C = \lambda A + (1 - \lambda)B$. On a C de coordonnées $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$ dans l'épigraphes de f donc $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$. On $y_1 \geq f(x_1)$ et $y_2 \geq f(x_2)$. Puisque λ et $1 - \lambda$ sont positifs, on a

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \geq \lambda \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

la dernière inégalité provenant de la convexité de f . Cela donne $y_C \geq f(x_C)$ donc C est bien dans l'épigraphes de f .

Exercice 10.4

C'est la traduction directe de la formule des 3 pentes. Par exemple si $z > b$ (avec $z \in I$), on a $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$, ce qui donne, puisque $z - a > 0$,

$$f(z) \geq f(a) + (z - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La droite (D) a pour équation $y = f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ainsi si $z > b$, le point $(z, f(z))$ est au dessus du point de même abscisse sur la droite (D) .

Exercice 10.5

- on commence par étudier la position du graphe par rapport à la droite passant par deux points. Soient $b > a$ et $A(a, f(a)), B(b, f(b))$. On sait que le segment $[AB]$ est dans l'épigraphes de f . On va étudier au delà de b . Soit $x > b > a$. On a la croissance du taux d'accroissement en a : $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, ce qui se traduit par $f(x) \geq f(a) + m(x - a)$ avec $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ lorsque $x > b$. Le graphe est donc au dessus de la droite (AB) au delà de B . De même avant A (faire un dessin pour bien comprendre).
- Supposons qu'il existe $b > a$ avec $f(b) > f(a)$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Supposons qu'il existe $b > a$ avec $f(a) > f(b)$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. La fonction f est donc constante.

Exercice 10.6

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur \mathbb{R}_+^* , cela donne

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{n}{x_1 + \dots + x_n} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)$$

ce qui donne le résultat en récrivant l'inégalité.

Exercice 10.7

On note $h = \sup(f, g)$. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$ et $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. On a

$$f(z) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y).$$

De même $g(z) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$ et finalement, $h(z) = \sup(f(z), g(z)) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$. La fonction h est convexe.

Exercice 10.8

Plusieurs façons de le montrer avec les différentes caractérisations. Par exemple, on peut fixer $a \in I$. La fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est à la fois croissante et décroissante sur $I \setminus \{a\}$. Elle est donc constante. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $f(x) - f(a) = \alpha(x - a)$, donc $f(x) = f(a) + \alpha(x - a)$. La relation est en encore vraie en a . La fonction est affine.

Exercice 10.9

1. La fonction est de classe \mathcal{C}^2 . On calcule f'' et on vérifie que $f'' \geq 0$.

2. Soit y_i tel que $x_i = \exp(y_i)$. On utilise la convexité précédente sur les y_i . Cela donne

$$\ln\left(1 + \exp\left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \exp(y_k)).$$

En composant par la fonction croissante exponentielle et en simplifiant avec $x_k = \exp(y_k)$, il vient

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i)\right)^{1/n}.$$

3. On simplifie l'inégalité qu'on veut prouver par $\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}$. Cela devient

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{b_i}{a_i}\right)\right)^{1/n},$$

ce qui est l'inégalité de la question précédente appliquée aux réels b_i/a_i

Exercice 10.10

Soit $g(x) = f(x) - M(x-a)(b-x)$. On a g de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$, $g'' = f'' + M \geq 0$ donc g est convexe sur $[a, b]$. De plus $g(a) = g(b) = 0$ et par convexité, $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ (courbe sous sa corde). Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq M(x-a)(b-x)$. On effectue la même chose avec $h(x) = f(x) + M(x-a)(b-x)$ pour obtenir $h \geq 0$ par concavité. Finalement, pour tout $x \in [a, b]$,

$$-M(x-a)(b-x) \leq f(x) \leq M(x-a)(b-x),$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 10.11

- Supposons qu'il existe a tel que $f(a) < 0$. On ne peut pas avoir $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \geq a$ (sinon le limite ne serait pas nulle). Il existe donc $b > a$ tel que $f(b) > f(a)$. En utilisant la croissance du taux d'accroissement en a , on vérifie que $f(x) \geq f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$ si $x > b$. Puisque $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$, on aurait $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Soit $y = mx + p$ une équation de l'asymptote. On pose $g(x) = f(x) - (mx + p)$. On vérifie facilement que g est encore convexe. De plus la limite de g en $+\infty$ est nulle. On a par conséquent $g \geq 0$, ce qui donne $f(x) \geq mx + p$ si $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.12

1. On utilise la concavité du logarithme avec les valeurs x^p et y^q (strictement positives) et les poids $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ de somme 1 :

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q = \ln x + \ln y.$$

En composant par l'exponentielle (croissante), on obtient l'inégalité.

- On somme les relations $a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{q} b_i^q$.
- On note $a'_i = a_i / \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}$. On a alors $(a'_i)^p = \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}$ et $\sum_{i=1}^n (a'_i)^p = 1$. On effectue de même avec b'_i . On peut alors utiliser la question précédente.
- On pose q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Cela donne $pq = p + q$ ou encore $q(p-1) = p$. On a alors

$$\sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/q}.$$

On a un résultat similaire avec b_i . En sommant les deux inégalités, il vient

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/q},$$

en simplifiant il reste

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}.$$

Cela donne le résultat.

Exercice 10.13

1. Il suffit de l'écrire. Soit $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a $g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$. Puisque f est croissante, on a

$$(f \circ g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)) \leq \lambda(f \circ g)(x) + (1 - \lambda)(f \circ g)(y),$$

la dernière inégalité s'obtenant par convexité de f .

2. Le sens direct est simple : la fonction $\ln f$ est convexe, la fonction $g : x \mapsto \exp(\alpha x)$ est convexe croissante sur \mathbb{R} car $\alpha > 0$, donc la composée f^α est convexe. Réciproquement, on écrit la convexité de f^α . On fixe $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a, après avoir composé par la fonction logarithme qui est croissante

$$\alpha \ln f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \ln(\lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y)).$$

On note $u(\alpha) = \alpha \ln f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ et $v(\alpha) = \ln(\lambda f^\alpha(x) + (1 - \lambda)f^\alpha(y))$ pour $\alpha \geq 0$ (les fonctions sont bien définies en 0 avec $u(0) = v(0) = 0$). On a pour tout $\alpha \geq 0$, $(v - u)(\alpha) \geq 0$. Les deux fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et, puisque $(v - u)(0) = 0$, on doit avoir $(v - u)'(0) \geq 0$. On a $u'(0) = \ln f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ et $v'(0) = \lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y)$. En écrivant $u'(0) \leq v'(0)$, on obtient

$$\ln f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \ln f(x) + (1 - \lambda) \ln f(y).$$