9 SÉRIES NUMÉRIQUES

I. GÉNÉRALITÉS

L'essentiel *(Séries numériques)*

→ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique :
- on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle (d'ordre n) de la série numérique de terme général u_n (on note $\sum u_n$ pour désigner « la série de terme général u_n »)
- on dit que $\sum u_n$ converge lorsque (S_n) admet une limite finie, sinon on dit qu'elle diverge,
- lorsque $\sum u_n$ converge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite des sommes partielles. On note alors $R_n = S - S_n$ le reste d'ordre n. On a alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

→ on ne change pas *la nature* d'une série en changeant ses premiers termes (on peut utiliser des sommes partielles $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$)

→ **si** $\sum u_n$ converge **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (et également $R_n = S - S_n \to 0$)

→ avec les notations précédentes, $u_n = S_n - S_{n-1}$ et, si la série converge, $u_n = R_{n-1} - R_n$.

→ étudier la suite (u_n) est équivalent à étudier la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ (ou $\sum(u_{n+1} - u_n)$).

II. SÉRIES À TERMES POSITIFS

Proposition 1 *(résultat fondamental)*

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. La suite des sommes partielles (S_n) est croissante. Elle est soit majorée et converge vers sa borne supérieure, soit non majorée et croissante vers $+\infty$.

L'essentiel *(Séries à termes positifs)*

→ soient deux séries à **termes positifs** $\sum u_n$ et $\sum v_n$:
- si pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge,
- si $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$ ou $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$ alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge,
- si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge

→ séries de référence :
- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$,
- $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$ (hors prog.)

→ règles de Riemann : soit $\sum u_n$ à termes positifs
- s'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tend vers une limite finie ou est borné alors $\sum u_n$ converge,
- si nu_n est minorée par $\ell \neq 0$, tend vers $\ell \neq 0$ ou vers $+\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.

→ critère de d'Alembert : soit $\sum u_n$ une série à termes **strictement positifs**. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite finie ℓ alors :
- si $\ell \in [0,1[$, alors $\sum u_n$ converge,
- si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge,
- si $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire.

Proposition 2 *(Comparaison série-intégrale)*

Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante et positive. La série $\sum\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)\right)$ converge (ainsi que $\sum\left(f(n) - \int_{n}^{n+1} f(t)\,dt\right)$). Notamment $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.

Méthode *(Étudier la nature d'une série à termes positifs)*

Lorsque $\sum u_n$ **est à termes positifs** :
- $\rightarrow$ comparaison à une série de référence (série de Riemann) par $\sim, \mathrm{o}, \leqslant$
- $\rightarrow$ comparer en utilisant les règles de Riemann (si on ne voit pas comment faire la comparaison directement),
- $\rightarrow$ critère de d'Alembert (essentiellement lorsqu'il y a des produits, puissances, factorielles),
- $\rightarrow$ comparaison série-intégrale
- $\rightarrow$ majoration des sommes partielles (suite des sommes partielles croissante et majorée),
- $\rightarrow$ retour aux sommes partielles (calculs, simplifications par télescopage, transformations)

Proposition 3 *(équivalents, développement)*

- $\rightarrow$ on a la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} = \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$
- $\rightarrow$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$ (hors prog. mais utilisé fréquemment)

Exercice 1

Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

b) $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n^3+1}}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}}$

d) $\frac{1}{n}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$

e) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

f) $(\ln n)^{-\ln n}$

g) $\dfrac{2.4.6\cdots(2n)}{n^n}$

h) $n^{1/n}-1$

i) $3^{-\sqrt{n}}$

j) $\left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

Exercice 2

Calculer les somme suivantes si elles existent :

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n}\operatorname{ch} n.$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$. Même question avec celle de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

III. Séries quelconques

L'essentiel *(Séries à termes quelconques)*

- $\rightarrow$ convergence absolue : si $\sum |u_n|$ converge alors $\sum u_n$ converge
- $\rightarrow$ théorème des séries alternées : soit $\sum u_n$ où $u_n = (-1)^n a_n$ avec a_n de signe constant et $(|u_n|)$ **décroissante de limite nulle**, alors
  - $\sum u_n$ converge,
  - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$ et R_n et u_{n+1} sont de même signe (R_n du signe de son premier terme)
  - notamment $|S_n|$ et $|S|$ sont majorées par $|u_0|$ (et du signe de u_0).

Remarque : dans le théorème des séries alternées, si $(|u_n|)$ est décroissante à partir du rang n_0 seulement, on a toujours la convergence, la majoration des restes (et leur signe) à partir du rang n_0 (mais plus la majoration des sommes partielles ou de la somme).

Majoration

Si $\sum u_n$ est à termes quelconques, majorer $|S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right|$ **ne sert à rien** pour étudier la convergence de la série. Seul le cas où les termes sont positifs donne un résultat lorsqu'on majore les sommes partielles. On peut cependant majorer $\sum_{k=0}^{n} |u_k|$ indépendamment de n pour étudier la convergence absolue de la série - ce n'est pas en général la méthode à tester en premier lieu.

L'essentiel *(Produit de Cauchy, exponentielle)*

→ si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de complexes, on appelle série produit la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

→ si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série produit est absolument convergente et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\right)$$

→ on définit sur $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. On a $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

Méthode *(Étudier la nature d'une série à termes quelconques)*

→ on étudie la convergence de la série à termes positifs $\sum |u_n|$,
→ on regarde si le TSA s'applique,
→ on effectue un développement asymptotique du terme général (jusqu'à un terme de signe constant ou de série absolument convergente),
→ on transforme la somme partielle afin de montrer qu'elle a une limite finie.

Exercice 4

Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$ b) $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}} - 1$ c) $\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ d) $(-1)^n\sqrt{n}\sin(\frac{1}{n})$

Exercice 5 *(Mines MP)*

1. Soit $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que la suite c_n converge.
2. Trouver des réels r, s et t tels que, pour tout $n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = r\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + s\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} + t\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$.
3. Exprimer $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ en fonction de la constante d'Euler.

IV. SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

L'essentiel *(Sommation des relations de comparaison)*

soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries avec, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant 0$

→ Cas d'une série convergente (comparaison des restes) : si $\sum v_n$ converge

- si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ alors $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$ (idem avec o)
- si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$,

→ Cas d'une série divergente (comparaison des sommes partielles) : si $\sum v_n$ diverge

- si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ alors $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ (idem avec o)
- si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$,

Exercice 6 *(Mines MP)*

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$ si $n \geqslant 1$.

1. Montrer que (u_n) est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. On suppose $\alpha > 1$ et on note ℓ la limite de (u_n). Déterminer un équivalent de $\ell - u_n$.
3. On suppose $\alpha < 1$. Déterminer un équivalent de $u_{n+1}^2 - u_n^2$, puis un équivalent de u_n^2.

V. EXERCICES

NATURE, SOMMES

Exercice 7

Déterminer la nature des séries de terme général (les paramètres qui apparaissent sont des réels) :

a) $n^\alpha \ln(1+e^{-n\alpha})$ b) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ c) $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n\sqrt{n}}$ d) $n^{n^a}-1$

Exercice 8 *(Mines MP)*

Soit $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2k\pi/3)}{k}$.

1. Trouver a, b et c tels que $T_{3n} = a\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k} + b\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+1} + c\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+2}$.
2. En déduire que T_n converge et donner sa limite.

Exercice 9

Soit (a_n) une suite de réels positifs. On pose $u_n = \dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Calculer sa somme pour $n \geqslant 1$ si $a_n = 1/\sqrt{n}$.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_n = \dfrac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$.

1. Nature de la série $\sum u_n$
2. Nature de la série $\sum (-1)^n u_n$

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par un premier terme $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Etudier rapidement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donner la nature des séries de terme général $u_n^2, \ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}, u_n$.
3. Déterminer un réel β tel que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ converge vers un réel non nul.
4. Donner la nature de la série de terme général u_n^α où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 12

Soit

$$u_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$$

Étudier la convergence de la suite $(\ln(\sqrt{n}\,u_n))$ puis celle de la série $\sum u_n$.

Exercice 13

Soit $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{i}{k^2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

UTILISATION DES SÉRIES

Exercice 14

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante et de limite nulle en $+\infty$. On note $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin(t)\,dt$.

1. Justifier la convergence de $\sum a_n$.
2. Prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\sin t\,dt$.
3. Montrer que $t \mapsto f(t)\sin(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si f l'est.

Exercice 15

Étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,dt$ en étudiant la série de terme général

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,dt$$

EXERCICES THÉORIQUES

Exercice 16 *(Règle de Duhamel)*

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. En étudiant la suite $v_n = n^\alpha u_n$, montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. On choisit alors a et b deux réels non entiers, déterminer la nature de la série de terme général
$$u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}.$$
3. *(Mines MP)* Soit $a > 0$. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(a+k)}$.

Exercice 17 *(Mines MP)* ✰

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $\left(u_n + \frac{1}{2}u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 18

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ diverge. On note S_n la somme partielle de la série.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$.
2. En déduire que la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $\frac{a_n}{S_n^2} \leqslant \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$.
4. En déduire que $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$ converge.
5. Généraliser aux séries $\sum \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 0$.

Exercice 19

Soit f une fonction continue, positive, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Justifier pour tout $h > 0$ la convergence de la série $\sum f(nh)$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.