CHAPITRE 9 - SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 9.3

→ Un simple encadrement suffit : on a
$$\frac{1}{n^\alpha}((n-1)\ln^2 2) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^\alpha}(n\ln^2 n).$$
Le terme de gauche est équivalent à $\frac{\ln^2 2}{n^{\alpha-1}}$, si bien que $\sum u_n$ diverge lorsque $\alpha-1 \leqslant 1$, c'est-à-dire $\alpha \leqslant 2$. La série de Bertrand $\sum \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$ et $\sum u_n$ converge si $\alpha > 2$. Finalement $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

→ un encadrement ne suffit plus (cela donne une partie des résultats seulement). On doit être plus précis sur l'encadrement de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Une comparaison série-intégrale (voir cours) donne $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. On a finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{\alpha-1/2}}$ et $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{3}{2}$.

Exercice 9.5

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ln x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$. La fonction est donc décoissante sur $[3,+\infty[$. On en déduit que $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$ converge. On en déduit que $\sum_{k=4}^{n}\left(\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt - f(k)\right)$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Puisque $\int_3^n \frac{\ln t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln^2 n - \frac{1}{2}\ln^2 3$, on en déduit que la suite (c_n) converge (on bouge un peu les constantes restantes). On aurait évidemment également pu étudier la série $\sum(c_{n+1}-c_n)$ et trouver un équivalent simple du terme général pour prouver la convergence.
2. On sépare les termes d'indices pairs et impairs de la somme alternée, puis on ajoute/soustrait les termes d'indices pairs :
$$\begin{aligned} S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} &= -\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p-1)}{(2p-1)} + \sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{2p} \\ &= -\sum_{p=1}^{2n}\frac{\ln p}{p} + 2\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2p)}{2p} \\ &= -\sum_{p=1}^{2n}\frac{\ln p}{p} + \sum_{p=1}^{n}\frac{\ln 2+\ln p}{p} \\ &= \sum_{p=1}^{n}\frac{\ln p}{p} + \ln 2\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{2n}\frac{\ln p}{p} \end{aligned}$$
3. On note θ la limite de c_n, ce qui permet d'obtenir $\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} = \frac{\ln^2 n}{2} + \theta + o(1)$ et on utilise le développement usuel $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. On reporte dans S_{2n}. Cela donne
$$\begin{aligned} S_{2n} &= (\ln 2)(\ln n+\gamma) + (\frac{1}{2}\ln^2 n + \theta) - (\frac{1}{2}\ln^2(2n)+\theta) + o(1) \\ &= \gamma\ln 2 + (\ln 2)\ln n + \frac{1}{2}\left(\ln^2 n - (\ln 2+\ln n)^2\right) + o(1) \\ &= \gamma\ln 2 + (\ln 2)\ln n + \frac{1}{2}\left(-\ln^2 2 - 2\ln 2\ln n\right) + o(1) \\ &= \gamma\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} + o(1) \end{aligned}$$
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \gamma\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$. Puisque $S_{2n+1} = S_{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \gamma\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$. Finalement la série est convergente et $\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{k} = \gamma\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}$.

Exercice 9.6

1. On commence par montrer par récurrence que tous les termes sont strictement positifs. On en déduit alors que $u_{n+1}-u_n > 0$. La suite est donc strictement croissante. Soit elle converge vers ℓ finie et strictement positive puisque $\ell \geqslant u_1 > 0$, soit vers $+\infty$. Supposons que $u_n \to \ell > 0$. On a alors $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}\frac{1}{n^\alpha}$. Puisque la suite (u_n) converge, la série $\sum u_{n+1}-u_n$ converge. Par théorème de comparaison, on doit avoir $\frac{1}{n^\alpha}$ convergente. On a donc $\alpha > 1$. Réciproquement si $\alpha > 1$, on a $0 \leqslant u_{n+1}-u_n \leqslant \frac{1}{u_1 n^\alpha}$. La série $\sum u_{n+1}-u_n$ converge et (u_n) converge.
2. On a $\ell - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha u_k}$. On a $\frac{1}{k^\alpha u_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}\frac{1}{k^\alpha}$, terme général positif d'une série convergente, donc $\ell - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$. On a montré que $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. Ainsi $\ell - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

3. On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. De plus $u_{n+1}+u_n = 2u_n + \frac{1}{u_n n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n$. On en déduit
$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2u_n}{n^\alpha u_n} = \frac{2}{n^\alpha}.$$
Par sommation des équivalents,
$$u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2 - u_1^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{1-\alpha} n^{1-\alpha}.$$

Exercice 9.8

1. On a, en fonction de la valeur de k,
$$\frac{\cos(2k\pi/3)}{k} = \begin{cases} \frac{1}{3p} & \text{si } k=3p \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{3p+1} & \text{si } k=3p+1 \\ -\frac{1}{2}\frac{1}{3p+2} & \text{si } k=3p+2 \end{cases}$$
d'où le résultat avec $a=1$, $b=c=-\frac{1}{2}$. On a ainsi
$$\begin{aligned} T_{3n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3k+2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k} \\ &= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{3n}\frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{3n}\frac{1}{p} \end{aligned}$$

2. On utilise le développement asymptotique $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. Cela donne
$$T_{3n} = \frac{1}{2}\left(\ln n + \gamma - \ln(3n) - \gamma + o(1)\right) = -\frac{\ln 3}{2} + o(1).$$
Puisque $T_{3n+1} = T_{3n} - \frac{1}{2(3n+1)}$ et $T_{3n+2} = T_{3n+1} - \frac{1}{2(3n+2)}$, les trois suites extraites convergent vers $-\frac{\ln 3}{2}$. Finalement la série est convergente, de somme $-\frac{\ln 3}{2}$.

Exercice 9.9

1. Aucune méthode de comparaison ne semble aboutir. On revient à la somme partielle et on essaie de faire apparaître une somme téléscopique. On remarque que
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} = \frac{a_n+1-1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)} \\ &= \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}. \end{aligned}$$
On note $v_n = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$. Pour $n\geqslant 2$, on a $u_n = v_{n-1} - v_n$. Pour $n=1$, on a $u_1 = \frac{a_1}{1+a_1} = 1 - v_1$. On peut poser $v_0 = 1$ afin d'avoir la relation valable également au rang 1. Finalement, on a
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = v_0 - v_n = 1 - v_n = 1 - \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}.$$
Puisque la suite (a_n) est positive, on en déduit que la suite (v_n) est décroissante et positive. Elle est donc convergente. Cela donne la convergence de $\sum u_n$.

2. On doit déterminer la limite de la suite v_n. On a $-\ln v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{\sqrt{k}})$. Or $\ln(1+\frac{1}{\sqrt{k}}) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et la série $\sum \ln(1+\frac{1}{\sqrt{k}})$ est divergente (vers $+\infty$). Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$ dans ce cas.

Exercice 9.10

1. On a immédiatement $u_n \geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On en déduit $0 \leqslant u_n = \frac{1}{n}e^{-u_{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}$. Finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Puisque $u_n = \frac{1}{n}e^{-u_{n-1}}$, on en déduit alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. La série $\sum u_n$ diverge.

2. On aimerait montrer que (u_n) est décroissante mais cela ne fonctionne pas. On effectue un développement asymptotique de u_n. On a effectivement, en utilisant le fait que $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$,
$$u_n = \frac{1}{n}(1-u_{n-1}+\mathrm{o}(u_{n-1})) = \frac{1}{n} - \frac{u_{n-1}}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Tout cela permet d'écrire
$$w_n = (-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (théorème des séries alternées), le terme restant est le terme d'une série absolument convergente (si on note $v_n = w_n - \frac{(-1)^n}{n}$, on a $|v_n| = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$). On en déduit finalement que $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Exercice 9.11

1. L'intervalle $]0,1[$ est stable par $x \mapsto x - x^2$. On en déduit l'existence de la suite et le fait que $u_n \in]0,1[$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a ensuite $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$. La suite est décroissante, minorée par 0 et converge vers une limite $\ell \in [0, u_0]$ qui vérifie $\ell = \ell - \ell^2$. Ainsi (u_n) est strictement décroissante vers 0.
2. Puisque $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$, la série $\sum u_n^2$ est de même nature que la suite (u_n) (série téléscopique $\sum u_n - u_{n+1}$). Elle est donc convergente. On a $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln u_{n+1} - \ln u_n$. La suite $(\ln u_n)$ diverge vers $-\infty$, donc la série téléscopique associée aussi. Enfin, $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$ puisque u_n tend vers 0. Par équivalence (termes négatifs), on en déduit que $\sum u_n$ diverge.
3. On effectue le développement asymptotique
$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta\left((1-u_n)^\beta - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^\beta(-\beta u_n) = -\beta u_n^{\beta+1}$$
La situation pour avoir une limite finie non nulle est de prendre $\beta = -1$.
4. Le théorème de sommation des équivalents (terme 1 de signe constant et série $\sum 1$ divergente) permet d'obtenir $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Par conséquent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $u_n^\alpha \sim \frac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum u_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 9.12

On note $w_n = \ln(\sqrt{n}\,u_n)$. On étudie la série de terme général $w_{n+1} - w_n$:
$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n} + \ln\left((1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2(n+1)}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2n(n+1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$
On en déduit que $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge et que w_n admet une limite finie ℓ. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}u_n = e^\ell > 0$ et $u_n \sim \frac{e^\ell}{\sqrt{n}}$. La série $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 9.13

Évidemment, on ne prend pas le logarithme... on passe sous forme exponentielle. Puisque $\mathrm{Re}(1 + \frac{i}{k^2}) > 0$,
$$1 + \frac{i}{k^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^4}}\exp(i \arctan\frac{1}{k^2})$$
et
$$u_n = \left(\prod_{k=1}^n\left(1 + \frac{1}{k^4}\right)\right)^{1/2}\exp\left(i\sum_{k=1}^n \arctan\frac{1}{k^2}\right)$$
Soit $v_n = \prod_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k^4}\right)$. On a $\ln v_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{1}{k^4}\right)$ et $\ln v_n$ converge vers un réel strictement positif α. De même $\sum \arctan\frac{1}{k^2}$ converge puisque $\arctan\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k^2}$. Si on note $\theta = \sum_{k=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{k^2}$, la suite (u_n) converge vers $\exp(\frac{\alpha}{2} + i\theta)$.

Exercice 9.14

1. On effectue un changement de variable :
$$a_n = \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u+n\pi)\,du = (-1)^n \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,du$$
On a donc une série alternée. On note $b_n = \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\sin(u)\,du$. D'une part $0 \leqslant b_n \leqslant \pi f(n\pi)$ donc b_n tend vers 0 et d'autre part
$$b_{n+1} - b_n = \int_0^{\pi} \big(f(u+(n+1)\pi) - f(u+u\pi)\big)\sin u\,du \leqslant 0.$$
La série vérifie le théorème des séries alternées donc est convergente.
2. Soit $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$, soit $n_x = E(x/\pi)$. On a
$$\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n_x-1} a_k + \int_{n_x\pi}^x f(t)\sin(t)\,dt.$$
Or $\left|\int_{n_x\pi}^x f(t)\sin(t)\,dt\right| \leqslant \pi f(n_x\pi)$, de limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$ (car n_x tend aussi vers $+\infty$). Puisque $\sum a_n$ converge, on en déduit l'existence de la limite de $\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. C'est le même principe. On note cette fois
$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)\sin(t)|\,dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)|\sin(t)|\,dt.$$
Puisque $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,dt = \int_0^{\pi} |\sin(t)|\,dt = 2$, on obtient l'encadrement
$$2f((n+1)\pi) \leqslant a_n \leqslant 2f(n\pi).$$
Comme précédemment, par encadrement, on justifie que $\int_0^{+\infty} f(t)|\sin t|\,dt$ converge (ce qui revient à l'intégrabilité recherchée) si et seulement si $\sum a_n$ converge. L'encadrement qu'on vient d'obtenir permet de montrer que $\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum f(n\pi)$ converge. Puisque f est continue, décroissante et positive, le théorème de comparaison série-intégrale indique que c'est le cas si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (en effectuant un changement de variable linéaire pour la multiplication par π), c'est-à-dire si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 9.15

- → Soit $f(t) = \dfrac{t}{1+t^6\sin^2 t}$ pour $t \in \mathbb{R}^+$. La fonction est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ donc $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est croissante et sa limite lorsque x tend vers $+\infty$ et la même que celle de la suite $F(n\pi)$. Puisque $F(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \dfrac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,dt$, on peut s'intéresser à la convergence de la série de terme général positif $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{t}{1+t^6\sin^2 t}\,dt$.
- → On encadre alors u_n :
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{n}{1+(n+1)^6\sin^2 t}\,dt \leqslant u_n \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{n+1}{1+n^6\sin^2 t}\,dt.$$
On a donc amené à calculer (par périodicité) $\int_0^{\pi} \dfrac{1}{1+n^6\sin^2 t}\,dt$. Un changement de variable du type « $u = \tan t$ », donne $\int_0^{\pi} \dfrac{1}{1+n^6\sin^2 t}\,dt = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+n^6}}$. On a ainsi un encadrement de u_n et finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\pi}{\sqrt{1+n^6}} = \dfrac{\pi}{n^2}$ (une majoration aurait suffit). On a donc convergence de $\sum u_n$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 9.16

1. On étudie plutôt la suite de termes $w_n = \ln(v_n)$ et même la série $\sum(w_{n+1} - w_n)$. On a
$$w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$
On effectue alors un développement limité
$$w_{n+1} - w_n = \alpha\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^2})\right) + \left(-\frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2}) - \frac{\alpha^2}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3})\right) = O(\frac{1}{n^2}).$$
Ainsi $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge, la suite (w_n) converge vers une limite finie ℓ et $v_n = \exp(w_n)$ converge vers $C = \exp(\ell) > 0$. On a par conséquent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^{\alpha}}$ et $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Puisque a et n ne sont pas entiers, u_n existe et ne s'annule pas.À partir d'un certain rang n_0, $n+a$ et $n+b$ sont positifs. On peut alors écrire $u_n = u_{n_0}.v_n$ où v_n est positif - cela permet de se ramener à la question précédente. On a $u_{n+1} = u_n \dfrac{n+a}{n+b}$. On effectue un développement limité du quotient
$$\frac{1+a/n}{1+b/n} = 1 - \frac{b-a}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $b-a>1$.
3. Exactement comme la question précédente. On a convergence de $\sum u_n$ si et seulement si $a>1$ (mais bon, c'est plus difficile si on n'a pas la première question posée).

Exercice 9.17

On note $v_n = u_n + \frac{1}{2}u_{2n}$. On essaie d'exprimer u_n en fonction de v_n : on ne peut pas le faire en descendant (en divisant n par 2 plusieurs fois car n n'est pas une puissance de 2. On part dans l'autre sens :

$$\begin{array}{rcl} v_n &=& u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \\ v_{2n} &=& u_{2n} + \frac{1}{2}u_{2^2n} \\ v_{2^2n} &=& u_{2^2n} + \frac{1}{2}u_{2^3n} \\ &\vdots& \\ v_{2^pn} &=& u_{2^pn} + \frac{1}{2}u_{2^{p+1}n} \end{array}$$

En effectuant une bonne combinaison de ces équations, on fait disparaître les termes intermédiaires :

$$v_n - \frac{1}{2}v_{2^1n} + \frac{1}{2^2}v_{2^2n} + \ldots + (-1)^p\frac{1}{2^p}v_{2^pn} = u_n + (-1)^p\frac{1}{2^{p+1}}u_{2^{p+1}n}.$$

Puisque la suite v_n converge, elle est bornée et la série de terme général $\frac{(-1)^p}{2^p}v_{2^pn}$ converge. Puisque la suite u est bornée, on peut passer à la limite lorsque p tend vers $+\infty$. Cela donne
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}v_{2^pn} = u_n.$$
On note ℓ la limite de la suite v. Ainsi $w_n = v_n - \ell$ tend vers 0. On peut alors écrire
$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}w_{2^pn} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}\ell = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}w_{2^pn} + \frac{1}{1+1/2}\ell$$
Soit $\varepsilon>0$. Il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $|w_n|\leqslant\varepsilon$ et alors
$$\left|\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}w_{2^pn}\right| \leqslant \varepsilon\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2^p} = 2\varepsilon.$$
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}w_{2^pn} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n = \frac{2}{3}\ell$.

Exercice 9.18

1. La suite (s_n) est croissante, par conséquent
$$\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} \geqslant \sum_{k=1}^{p}\frac{a_{n+k}}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}.$$
2. Supposons que la série $\sum\frac{a_k}{S_k}$ converge. On obtient, lorque p tend vers $+\infty$,
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_{n+k}}{S_{n+k}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a_k}{S_k} \geqslant 1$$
car $\lim\limits_{p\to+\infty}S_{n+p} = +\infty$. Or le reste de $\sum\frac{a_k}{S_k}$ doit tendre vers 0. Cela donne une contradiction.
3. On simplifie
$$\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_nS_{n-1}} = \frac{a_n}{S_nS_{n-1}} \geqslant \frac{a_n}{S_nS_n} = \frac{a_n}{S_n^2} \geqslant 0$$
puisque $S_n \geqslant S_{n-1}$. La suite $(\frac{1}{S_n})$ converge vers 0 donc la série de terme général $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$ converge. On en déduit, par comparaison pour les séries à termes positifs, que $\sum\frac{a_n}{S_n^2}$ converge.

4. On peut étudier facilement certaines valeurs : puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, on a $S_n \geqslant 1$ à partir d'un certain rang n_0. Si $\alpha \geqslant 2$, alors pour $n \geqslant n_0$, $\frac{a_n}{S_n^\alpha} \leqslant \frac{a_n}{S_n^2}$ et $\sum \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ converge. Si $\alpha \leqslant 1$, alors pour $n \geqslant n_0$, $\frac{a_n}{S_n^\alpha} \geqslant \frac{a_n}{S_n}$ et $\sum \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ diverge. De façon générale, on s'inspire d'une formule proche d'une comparaison série-intégrale. On choisit $\alpha > 1$ (on peut le faire aussi lorsque $\alpha < 1$ en modifiant les bornes de l'intégrale et le sens des inégalités). Puisque la suite (S_n) est strictement croissante vers $+\infty$, on a
$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{S_n^\alpha} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^\alpha} = \frac{a_n}{S_n^\alpha}$$
Or $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_{S_{n-1}}^{S_n} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$. Tout cela donne la majoration
$$0 \leqslant \frac{a_n}{S_n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right).$$
On en déduit la convergence de $\sum \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ (la série téléscopique majorante est convergente car la suite associée converge vers 0).

Exercice 9.19

1. On utilise une comparaison série intégrale. Soit $h > 0$. La fonction $f_h : x \mapsto f(xh)$ est décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (changement de variable linéaire). On en déduit directement que $\sum f_h(n)$ converge avec $f_h(n) = f(nh)$.
2. On reprend les encadrements. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$hf((k+1)h) \leqslant \int_{kh}^{(k+1)h} f(t)\,dt \leqslant hf(kh),$$
ce qui donne en sommant sur $\mathbb{N}$ (la fonction est intégrable et les séries convergent :
$$h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$$
ou encore
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt + hf(0).$$
Lorsque h tend vers 0, on obtient $\lim_{h\to 0} h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.