

8

MATRICES

I. GÉNÉRALITÉS

L'essentiel (Notations et opérations)

- Ensembles $M_{pq}(\mathbb{K})$, $M_n(\mathbb{K})$, $GL_n(\mathbb{K})$.
- Si $C = AB$ alors $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ ($A \in M_{pn}(\mathbb{K})$, $B \in M_{nq}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{pq}(\mathbb{K})$).
- base canonique (E_{ij}) avec $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$.
- transposition : linéarité, ${}^t AB = {}^t B {}^t A$ et ${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1}$. Sous-espaces $A_n(\mathbb{K})$ et $S_n(\mathbb{K})$ de $M_n(\mathbb{K})$.
- trace : linéarité, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ et $\text{tr}({}^t A) = \text{tr} A$.
- matrice d'un vecteur et d'une application linéaire. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, \mathcal{B} une base de E et \mathcal{C} une base de F , définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et relation $y = f(x)$ si et seulement si $Y = AX$. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{pq}(\mathbb{K})$ si $\dim E = q$ et $\dim F = p$ une fois des bases de E et F choisies.
- si $A \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on appelle application linéaire canoniquement associée à A l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ dont la matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^q et \mathbb{R}^p est A .
- rang d'une matrice et lien avec les autres rangs

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit A, B deux matrices non nulles de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $\text{tr}(A)\text{tr}(B) \neq 1$. Résoudre le système d'inconnues X et Y dans $M_n(\mathbb{K})$

$$\begin{cases} X &= I_n + \text{tr}(Y)A \\ Y &= I_n + \text{tr}(X)B \end{cases}$$

Exercice 3 (matrices de rang 1)

- Montrer qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe des vecteurs $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls tels que $A = U {}^t V$.
- On suppose que $A = U {}^t V$ avec $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls.
 - Montrer que $\text{tr}(A) = {}^t U \cdot V$. En déduire A^k pour $k \in \mathbb{N}$.
 - Déterminer $\ker A$.
- Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{rg}(AB - BA) = 1$. Combien vaut $(AB - BA)^2$?

Exercice 4

Soient $A = X^4 + 1$ et $B = X^4 + X$, soit f l'application qui à P dans $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de AP par B .

- Montrer que f est linéaire
- Donner la matrice de f dans la base canonique.
- Déterminer l'image et le noyau de f .

Exercice 5

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E . Soit H le plan d'équation $x + y + z = 0$, et D la droite $x = y/2 = z/3$.

- Montrer que $H \oplus D = E$.
- Trouver la matrice de la projection sur H parallèlement à D .

**Méthode** (Montrer l'inversibilité d'une matrice)

Pour montrer que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible :

- on trouve $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$,
- on montre que $\text{rg } A = n$.
- on montre que si $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$ est tel que $AX = 0$ alors $X = 0$ (injectivité de l'application linéaire canoniquement associée)
- on montre que $\det A \neq 0$

Exercice 6 (matrice à diagonale strictement dominante)

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est à diagonale strictement dominante si elle vérifie, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Montrer qu'une telle matrice est inversible. On pourra considérer $X \neq 0$ tel que $AX = 0$ et regarder la ligne i_0 telle que $|x_{i_0}|$ est la plus grande des valeurs absolues des coordonnées de X

II. CHANGEMENT DE BASES**L'essentiel** (Changement de bases)

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E (et \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux bases de F)

- Matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' : on écrit en colonnes les vecteurs de la nouvelle base \mathcal{B}' dans l'ancienne base \mathcal{B} . Elle est notée $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ ou $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ou $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ (elle « part » de \mathcal{B}' pour « arriver » dans \mathcal{B}).
- On a $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$
- Si $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, alors $X = PX'$
- Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$, $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$, alors $B = Q^{-1}AP$

$$\begin{array}{ccc}
 (E, \mathcal{B}') & \xrightarrow[\quad B \quad]{\quad f \quad} & (F, \mathcal{C}') \\
 \text{Id}_E \downarrow P & & \downarrow Q \text{Id}_F \\
 (E, \mathcal{B}) & \xrightarrow[\quad f \quad]{\quad A \quad} & (F, \mathcal{C})
 \end{array}$$

L'essentiel (Matrices semblables et équivalentes)

- A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. A et B sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n dans deux bases de E .
- Si A et B sont semblables alors elles ont même rang, même trace, même déterminant (pas de réciproque)
- A et B dans $M_{pq}(\mathbb{K})$ sont équivalentes lorsqu'il existe $P \in GL_q(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $B = Q^{-1}AP$ (matrices d'une application linéaire dans deux jeux de bases différents).
- Les matrices A et B dans $M_{pq}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang r . Elles sont alors équivalentes à la matrice J_r de $M_{pq}(\mathbb{K})$.

Exercice 7

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } u = \ker u$.

1. Montrer que n est pair.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer la dimension du commutant de u (l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u).

Exercice 8

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang r . Montrer que A peut s'écrire comme somme de r matrices de rang 1.



III. MATRICES PAR BLOCS

L'essentiel (Opérations par blocs)

- comprendre la représentation par blocs et opérations habituelles (sommes, produits par blocs).
- stabilité : si $E = F \oplus G$, $f \in \mathcal{L}(E)$ alors F est stable par f si et seulement si la matrice de f dans une base adaptée à $E = F \oplus G$ est sous la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
- Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ alors chaque E_i est stable par f si et seulement si la matrice de f dans une base adaptée est diagonale par blocs (avec des blocs carrés de taille $\dim E_i$).
- Déterminant par blocs : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$. Généralisation lorsque M est triangulaire supérieure par blocs

Exercice 9

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in GL_p(\mathbb{K})$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 10

1. Soit $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg} C$.
2. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $n + \operatorname{rg}(I_p - BA) = p + \operatorname{rg}(I_n - AB)$. On pourra s'intéresser aux produits de la matrice $M = \begin{pmatrix} I_p & B \\ A & I_n \end{pmatrix}$ avec une matrice par blocs bien choisies. En déduire que $\operatorname{rg}(I_n - AB) = n - p \Leftrightarrow BA = I_p$.

IV. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

L'essentiel (Opérations élémentaires)

- les trois types de matrices :
 - permutation $T_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$,
 - dilatation $T_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ lorsque $\lambda \neq 0$, $T_i(\lambda)^{-1} = T_i(1/\lambda)$,
 - transvection $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ si $i \neq j$, $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$
- opérations à droite : sur les colonnes. Si A est une matrice, la multiplication correspond à
 - $AT_{ij} : C_i \leftrightarrow C_j$,
 - $AT_i(\lambda) : C_i \leftarrow \lambda C_i$,
 - $AT_{ij}(\lambda) : C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$
- opérations à gauche : sur les lignes. Si A est une matrice, la multiplication correspond à
 - $T_{ij}A : L_i \leftrightarrow L_j$,
 - $T_i(\lambda)A : L_i \leftarrow \lambda L_i$,
 - $T_{ij}(\lambda)A : L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
- utilisations :
 - **rang de la matrice** : conservé par toutes ces opérations, on peut faire indifféremment des opérations sur les lignes et les colonnes
 - **image de la matrice** : manipulation uniquement des colonnes
 - **inverse de la matrice** : soit lignes, soit colonnes MAIS ne pas alterner.

V. EXERCICES

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients non tous nuls.

1. Quel est le rang de A ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit la matrice d'un projecteur.
3. On pose $B = 2A - \operatorname{tr}(A)I_n$. Calculer $\det B$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.
4. Calculer B^2 . Calculer B^{-1} dans le cas où B est inversible.

**Exercice 12**

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et soit $C(J) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MJ = JM\}$.

1. Montrer que $C(J)$ est un sous-espace vectoriel et en donner une base. L'ensemble $C(J)$ est appelé *commutant* de J .
2. Existe-t-il une inclusion entre $C(J)$ et $D(J) = \{Y \in M_3(\mathbb{R}) \mid Y^2 = J\}$? Trouver $D(J)$.

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 14

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $3n$. Soit f un endomorphisme de E tel que $\text{rg } f = 2n$ et $f^3 = 0$. Montrer que $\ker f = \text{Im } f^2$ et trouver une base \mathcal{B} telle que la matrice de f dans \mathcal{B} soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$.

1. Montrer que $(a, f(a))$ est libre pour tout a non nul de E .
2. Montrer que n est un entier pair. On pose $n = 2p$. On pose $\text{Vect}(a, f(a)) = F(a)$ pour tout a non nul de E .
3. Montrer l'existence de a_1, \dots, a_p dans E tels que $F(a_1) \oplus \dots \oplus F(a_p) = E$.
4. Dédurre des questions précédentes une base de E dans laquelle la matrice de f est particulièrement simple.

Exercice 16 (Mines MP)

À quelle condition les matrices $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables?

Exercice 17 (Mines MP)

Soit $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ non nulles telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 18

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et G un sous-espace de E . On note

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{L}(E, F), G \subset \ker u\}.$$

1. Montrer que \mathcal{U} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.
2. Déterminer la dimension de \mathcal{U} :
 - en raisonnant matriciellement dans une base bien choisie.
 - en montrant que l'application φ suivante est un isomorphisme :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{U} & \rightarrow \mathcal{L}(H, F) \\ u & \mapsto u|_H \end{cases}$$

où H est un supplémentaire de G .

Exercice 19 (Mines MP)

Soient A dans $M_{3,2}(\mathbb{R})$ et B dans $M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que AB est la matrice d'un projecteur. Quel est son rang?
2. Montrer que $BA = I_2$.

**Exercice 20**

Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array} \right)$.

1. Déterminer le rang de M en fonction de A et B .
2. Calculer M^{-1} quand elle existe.

Exercice 21

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = BA = 0$ si, et seulement si, A n'est pas inversible.

Exercice 22 (Mines MP)

RMS 2011 - 401

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X - (P_n(X))^2$ soit divisible par X^n (utiliser un dl de $x \mapsto \sqrt{1+x}$).
2. Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = I_n + N$.

Exercice 23

Soient A, B des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $n+1$ réels distincts $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que $A + \lambda_k B$ est nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 24

Soit n dans \mathbb{N}^* et p_1, p_2, \dots, p_m des projecteurs non nuls de $E = \mathbb{R}^n$ vérifiant $p_i \circ p_j = 0$ pour tout $i \neq j$.

1. On suppose $m = n$. Montrer que $E = \text{Im } p_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_n$.
2. Montrer que la famille (p_1, p_2, \dots, p_m) est libre.
3. Soit p un projecteur de \mathbb{R}^n . Déterminer la dimension du commutant de p (c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de \mathbb{R}^n commutant avec p).
4. Trouver une partie libre de cardinal maximal, constituée de projecteurs de \mathbb{R}^n .

Exercice 25 (Mines MP)

Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$ défini par $\Phi(M) = aM + b^t M$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit injective. Calculer $\text{tr } \Phi$ et $\det \Phi$.