CHAPITRE 8 - MATRICES

Exercice 8.1

→ On peut calculer les premières puissances et trouver une relation de récurrence. On peut aussi décomposer A sous la forme $A = I_3 + B$ et on constante que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$. Pour $n \geqslant 2$, on a alors

$$(I_3 + B)^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 + 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la formule est valable pour $n = 0$ et $n = 1$. Finalement on a A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

→ On peut inverser cette matrice (par les moyens usuels). On peut imaginer que la formule est encore vraie pour $n = -m$ où $m \in \mathbb{N}$. On pose $B_{-n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-n(-n-1)}{2} & 1 & -n \\ -n & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on effectue le produit AB_{-n} pour constater qu'il vaut I_3. Ainsi $A^{-n} = B_{-n}$ si $n \in \mathbb{N}$ et l'expression est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8.2

Soit (X, Y) une solution. On a alors le système

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(X) &= n + \operatorname{tr}(Y)\operatorname{tr}(A) \\ \operatorname{tr}(Y) &= n + \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(B) \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tr}(X) - \operatorname{tr}(Y)\operatorname{tr}(A) &= n \\ -\operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(B) + \operatorname{tr}(Y) &= n \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $1 - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) \neq 0$. Il admet donc une unique solution $\operatorname{tr}(X) = n\frac{1+\operatorname{tr}(A)}{1-\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)}$ et $\operatorname{tr}(Y) = n\frac{1+\operatorname{tr}(B)}{1-\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)}$. On obtient alors

$$X = I_n + n\frac{1+\operatorname{tr}(B)}{1-\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)}A \text{ et } Y = I_n + n\frac{1+\operatorname{tr}(A)}{1-\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)}B.$$

On vérifie ensuite que ces matrices conviennent.

Exercice 8.3

1. Si A est de rang 1, alors ses colonnes sont toutes proportionnelles à un même vecteur V non nul de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a $A = \begin{pmatrix} u_1 V & u_2 V & \cdots & u_n V \end{pmatrix}$. On note U le vecteur colonne ${}^t(u_1, \ldots, u_n)$ et on a $A = U^t V$. Réciproquement si $A = U^t V$, on a $\operatorname{rg}(A) \leqslant \operatorname{rg}(V) = 1$. Le terme général de A est $a_{ij} = u_i v_j$. L'un de ces termes au moins est non nul puisque U et V sont des vecteurs non nuls.
2. (a) On a $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = {}^tUV$ - en fait on identifie la matrice ${}^tUV$ de taille $(1,1)$ à son seul coefficient. On a ainsi $A^2 = U^t(V)U^tV = U(\operatorname{tr}(A)^tV) = \operatorname{tr}(A)A$. Par récurrence, on a $A^k = (\operatorname{tr} A)^{k-1}A$ si $k \in \mathbb{N}^*$ et $A^0 = I_n$.
   (b) On sait qu'on obtient un hyperplan. On résout $AX = 0 = U({}^tVX)$. En écrivant ce système, on obtient plusieurs fois une équation proportionnelle à $VX = 0$. Le noyau de A est l'hyperplan d'équation $VX = 0$.
3. On a $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$, donc $(AB - BA)^2 = 0$.

Exercice 8.5

1. Un vecteur directeur de D est $(1, 2, 3)$. Ce vecteur n'est pas dans le plan H donc les deux espaces sont supplémentaires (tout vecteur en dehors d'un hyperplan définit un supplémentaire).
2. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $v = (x', y', z')$ sont image. On a $v = p(u)$ si et seulement si $v \in H$ et $v - u \in D$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $v - u = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$ et $v \in H$. On a donc $x' = x + \lambda$, $y' = y + 2\lambda$, $z' = z + 3\lambda$ et $(x + y + z) + 6\lambda = 0$. Cela donne $\lambda = -\frac{1}{6}(x + y + z)$ et enfin

$$\begin{cases} x' &= \frac{5x - y - z}{6} \\ y' &= \frac{-2x + 4y - 2z}{6} \\ z' &= \frac{-3x - 3y + 3z}{6} \end{cases}$$

cela se récrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

et on obtient ainsi la matrice de la projection.

Exercice 8.6

Supposons qu'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. On note i_0 l'indice tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|, i \in [\![1; n]\!]\}$. On a $|x_{i_0}| > 0$ puisque $X \neq 0$. On écrit la ligne i_0 :

$$a_{i_0,i_0} x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j = 0,$$

soit $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j$. On obtient alors

$$|a_{i_0,i_0}x_{i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|\right)|x_{i_0}|.$$

Puisque $x_{i_0}\neq 0$, on obtient $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$, d'où une contradiction.

Exercice 8.8

Il existe deux matrices inversibles P et Q de $GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PJ_rQ$ où J_r est diagonale avec r termes égaux à 1 au début, puis des 0. Ccela s'écrit $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{ii}$. Alors

$$A = \sum_{i=1}^{r} PE_{ii}Q.$$

Puisque P et Q sont inversibles, on a $\mathrm{rg}\,(PE_{ii}Q) = \mathrm{rg}\,(E_{ii}) = 1$. Ainsi A est somme de matrices de rang 1.

Exercice 8.9

Le déterminant vaut $\det(A).\det(C)\neq 0$. La matrice est inversible. On cherche l'inverse sous la forme

$$N = \begin{pmatrix} A^{-1} & D \\ 0 & C^{-1}\end{pmatrix}.$$

Le produit donne

$$MN = \begin{pmatrix} I_n & AD+BC^{-1} \\ 0 & I_r\end{pmatrix}.$$

Il suffit de prendre $D = -A^{-1}BC^{-1}$ pour obtenir l'inverse.

Exercice 8.10

1. Le plus simple est de passer par un produit matriciel. Soit r le rang de C et P,Q deux matrices de $GL_(\mathbb{K})$ telles que $PCQ = J_r$. On considère la matrice diagonale par blocs $\tilde{P} = \mathrm{diag}(I_n, P)$ et $\tilde{Q} = \mathrm{diag}(I_n, Q)$. Elles sont toutes les deux inversibles et $\tilde{P}\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & C\end{pmatrix}\tilde{Q} = \begin{pmatrix} I_n & B' \\ 0 & I_r\end{pmatrix}$ est de rang $n+r$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -A & I_n\end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible et $M.N = \begin{pmatrix} I_p - AB & B \\ 0 & I_n\end{pmatrix}$. Cela donne (on ne change pas le rang en multipliant par une matrice inversible) en utilisant la question précédente (à moduler), $\mathrm{rg}\,M = \mathrm{rg}\,(I_p - BA) + n$. En multipliant à droite par $\begin{pmatrix} I_p & -B \\ 0 & I_n\end{pmatrix}$, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ A & I_n - AB\end{pmatrix}$ et de même $\mathrm{rg}\,M = p + \mathrm{rg}\,(I_n - AB)$.
   Si $\mathrm{rg}\,(I_n - AB) = n - p$, alors $\mathrm{rg}\,(I_p - BA) = 0$ donc $BA = I_p$.

Exercice 8.11

1. Les colonnes sont toutes proportionnelles donc A est de rang au plus 1. Puisque les coefficients ne sont pas tous nuls, A est de rang A.
2. On effectue le calcul de A^2 et on obtient $A^2 = (a_1 + \ldots + a_n)A$ (ce qui est général car lorsque A est de rang 1, on a $A^2 = (\mathrm{tr}\,A)A$). La matrice est donc la matrice d'un projecteur si et seulement si $\mathrm{tr}\,A = \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.
3. On note s la trace de A. On calcule le déterminant de B en sommant toutes les lignes dans la première. On peut alors factoriser par $2(a_1 + \ldots + a_n) - s = s$ et obtenir une première ligne de 1. On effectue alors les opérations $L_i \leftarrow L_i - a_iL_1$ pour i allant de 2 à n. Il reste alors un déterminant

$$s.\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -s\end{vmatrix} = (-1)^{n-1}s^n$$

   LA matrice est inversible si et seulement si $s = \mathrm{tr}\,A \neq 0$.
4. On a $B^2 = 4A^2 - 4\mathrm{tr}\,(A)A + \mathrm{tr}\,(A)^2 I_n = 4sA - 4sA + s^2 I_n = s^2 I_n$. Dans le cas où s est non nul, on a $B^{-1} = \frac{1}{s^2}B$.

Exercice 8.12

1. On vérifie rapidement que si M et N sont da,s $C(J)$ alors $M + \lambda N$ également (et aussi MN) donc $C(J)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ (et même une sous-algèbre). On prend une matrice M avec 9 coefficients quelconques, on calcule les produits MJ et JM et on a égalité si et seulement si il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a\end{pmatrix} = aI_3 + bJ + cJ^2.$$

   La famille (I_3, J, J^2) est une base de $C(J)$.

2. Si $Y^2 = J$ alors $YJ = Y^3 = JY$ donc $D(J) \subset C(J)$. On cherche donc les éléments de $D(J)$ sous la forme $Y = aI + bJ + cJ^2$. En utilisant la relation $J^2 = I_3$, on a
$$Y^2 = (a^2 + 2bc)I + (2ab + c^2)J + (b^2 + 2ac)J^2$$
donc $Y^2 = J$ si et seulement si $a^2 + 2bc = 0, b^2 + 2ac = 0$ et $c^2 + 2ab = 1$. En multipliant la première équation par a et la seconde par b, on obtient $a^3 = b^3$ donc $a = b$. Si $a = b = 0$, il reste $c^2 = 1$ d'où $M = \pm J^2$. Sinon, on a $a = b$, $a + 2c = 0$ et $c^2 + 2a^2 = 1$ donc $a = b = -2c$ et $9c^2 = 1$. Cela donne $M = \pm\frac{1}{3}(2I_3 + 2J - J^2)$. Si on écrit bien la résolution des systèmes, le raisonnement est fait par équivalence. Sinon, on peut se contenter de vérifier que les 4 matrices obtenues conviennent.

Exercice 8.14

Le but est de construire une base de vecteurs $(e_1, \ldots, e_{3n})$ de E telle que $f(e_i) = e_{n+i}$, $f(e_{n+i}) = e_{2n+i}$ et $f(e_{2n+i}) = 0$ pour $i \in [\![1;n]\!]$. On doit tout d'abord étudier les dimensions des différentes espaces entrant en jeu.

- → On a $f \circ f^2 = 0$, donc $\operatorname{Im} f^2 \subset \ker f$. De même $f^2 \circ f = 0$ donne $\operatorname{Im} f \subset \ker f^2$. On sait que $\dim \operatorname{Im} f = 2n$ par hypothèse et $\dim\ker f = n$ par le théorème du rang. On en déduit notamment $\dim\ker f^2 \geqslant 2n$ et $\dim \operatorname{Im} f^2 \leqslant n$. Le théorème du rang appliqué à f^2 ne donne rien de plus.
- → On a besoin des égalités. On peut par exemple montrer que $\dim\ker f^2 \leqslant 2\dim\ker f$ (cas particulier de $\dim\ker(g \circ f) \leqslant \dim\ker f + \dim\ker g$ - dans cette situation, on peut considérer g la restriction de f à $\ker f^2$ et appliquer le théorème du rang, en montrant que $\operatorname{Im} g \subset \ker f$). Cela donne $\dim\ker f^2 \leqslant 2n$. Finalement on a $\ker f^2 = \operatorname{Im} f$ de dimension commune $2n$ et $\operatorname{Im} f^2 = \ker f$ de dimension n.
- → On doit construire la famille de vecteurs. On a plusieurs possibilités. En voici une. On commence par choisir une base de $\ker f$: elle comporte n vecteurs qu'on note $e_{2n+1}, \ldots, e_{3n}$. Puisque $\operatorname{Im} f^2 = \ker f$, chacun de ces vecteurs est dans $\operatorname{Im} f^2$. Il existe des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ tels que $f^2(e_i) = e_{2n+i}$ pour $i \in [\![1;n]\!]$. On pose alors $e_{n+1} = f(e_1), \ldots, e_{2n} = f(e_n)$. En utilisant la définition des n premiers e_k, on a $f(e_{n+k}) = f^2(e_k) = e_{2n+k}$ (toujours avec $1 \leqslant k \leqslant n$). Si on prouve que la famille de vecteurs est libre, on aura une base. Dans cette base, la matrice de f sera exactement celle qu'on attend (tout est fait pour).
- → Considérons une combinaison linéaire
$$(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) + (\lambda_{n+1} e_{n+1} + \ldots + \lambda_{2n} e_{2n}) + (\lambda_{2n+1} e_{2n+1} + \ldots + \lambda_{3n} e_{3n}) = 0.$$
On peut la récrire
$$(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) + \big(\lambda_{n+1} f(e_1) + \ldots + \lambda_{2n} f(e_n)\big) +$$
$$\Big(\lambda_{2n+1} f^2(e_1 + \ldots + \lambda_{3n} f^2(e_n)\Big) = 0.$$
On applique f^2, il vient $\lambda_1 e_{2n+1} + \ldots + \lambda_n e_{3n} = 0$. Puisque la famille est une base de $\ker f$, chaque scalaire est nul. On reprend la première relation avec ces coefficients nuls. On applique f et on obtient de même $\lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{2n} = 0$. Enfin les termes restants donnent la valeur 0 pour les n derniers scalaires.

Exercice 8.15

1. Soit α et β deux réels tels que $\alpha a + \beta f(a) = 0$. En appliquant f, on obtient $\alpha f(a) - \beta a = 0$ Alors $\alpha(\alpha a + \beta f(a)) - \beta(\alpha f(a) - \beta a) = (\alpha^2 + \beta^2)a = 0$, et puisque $a \neq 0$, on en déduit $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, d'où $\alpha = \beta = 0$. Le système $(a, f(a))$ est donc libre.
2. Si $f^2 = -\mathrm{Id}$, on a $\det f^2 = (\det f)^2 = (-1)^n$, ce qui n'est possible que si n est pair.
3. Soit $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, et soit $(a_1, \ldots, a_k)$ dans E^k tels que la somme $F_k = F(a_1) + \cdots + F(a_k)$ soit directe. Montrons la propriété suivante : Si a_{k+1} n'appartient pas à F_k, alors la somme $F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_{k+1})$ est directe.
Montrons que $F(a_{k+1}) \cap F_k = \{0\}$. Soit x dans $F(a_{k+1}) \cap F_k$. Il existe deux réels λ et μ tels que $x = \lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})$. Comme F_k est stable par f, on a $f(x) = f(\lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})) = \lambda f(a_{k+1}) - \mu a_{k+1} \in F_k$, puis $\lambda(\lambda a_{k+1} + \mu f(a_{k+1})) - \mu(\lambda f(a_{k+1}) - \mu a_{k+1}) = (\lambda^2 + \mu^2)a_{k+1} \in F_k$. Mais puisque a_{k+1} n'est pas dans F_k cela implique $\lambda = \mu = 0$. Il en résulte que $F(a_{k+1}) \cap F_k = \{0\}$. La somme $F(a_{k+1}) + F_k$ est donc directe, d'où l'on déduit que la somme $F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_{k+1})$ est directe. Alors $\dim(F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_{k+1})) = 2k + 2$. En partant de $F(a_1)$ où $a_1 \neq 0$, on construit ainsi une suite de sous-espaces $F(a_1), \ldots, F(a_p)$ tels que $\dim(F(a_1) + \cdots + F(a_k) + F(a_p)) = 2p$. Alors $F(a_1) \oplus \cdots \oplus F(a_k) \oplus F(a_p) = E$, ce qui donne le résultat.
4. Notons $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans la base $(a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \ldots, a_p, f(a_p))$, l'application f a pour matrice
$$\begin{pmatrix} J & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.16

On note respectivement A et B ces matrices.

- → Lorsque $a = b = 0$, elles sont bien évidemment semblables.
- → Lorsque $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou le contraire), on a $A = I_2$. La seule matrice semblable à I_2 est I_2. Elles ne sont pas semblables.
- → On suppose que $ab \neq 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A, dans la base (e_1, e_2). On a $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2 + ae_1$. Considérons la base (e_1', e_2) avec $e_1' = \lambda e_1$. On a toujours $f(e_1') = e_1'$, et $f(e_2) = e_2 + \frac{a}{\lambda} e_1'$. On choisit $\lambda = a/b$, alors la matrice de f dans la nouvelle base est B.

Exercice 8.17

Dans ce type d'exercice où A et B sont deux matrices quelconques vérifiant une même propriété, on essaie de montrer qu'une telle matrice est semblable à une matrice fixe de référence (et ainsi A et B seront semblables par transitivité). On ne travaille que sur A ou sur f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On cherche une base dans laquelle la matrice de f est simple.

- → On a $f^2 = 0$ donc $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f$. Par le théorème du rang, on a $\dim\ker f + \mathrm{rg}\, f = 3$. On a $1 \leqslant \mathrm{rg}\, f \leqslant \dim\ker f$. Cela ne laisse qu'une possibilité : $\dim\ker f = 2$ et $\mathrm{rg}\, f = 1$ (avec $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f$). Soit e_2 un vecteur format une base de $\mathrm{Im}\, f$ et e_1 tel que $f(e_1) = e_2$. Puisque e_2 est dans $\ker f$, on peut lui adjoindre un vecteur e_3 tel que (e_2, e_3) est une base de $\ker f$.
- → Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit une combinaison $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. On applique f, ce qui donne $\alpha f(e_1) = \alpha e_2 = 0$, donc $\alpha = 0$. Il reste alors $\beta e_2 + \gamma e_3 = 0$, et $\beta = \gamma = 0$ puisque (e_2, e_3) est libre.
- → Dans la base (e_1, e_2, e_3), la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Toutes les matrices avec les propriétés de l'enoncé sont semblables à cette dernière matrice.

Exercice 8.18

1. $\mathscr{U}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{L}(E,F)$ qui contient l'application linéaire nulle. Si $f, g \in \mathscr{U}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $x \in G$, $f(x) = g(x) = 0$ et $(f + \lambda g)(x) = 0$ donc $f + \lambda g \in \mathscr{U}$. On en déduit que $\mathscr{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$.
2. On note $p = \dim E$, $q = \dim F$ et $r = \dim G$.
   - → Une fois fixée une base $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F, on a une bijection entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $M_{qp}(\mathbb{K})$. On fixe une base de E commençant par r vecteurs formant une base de G et une base quelconque de F. On montre alors que $f \in \mathscr{U}$ si et seulement si la matrice $M(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})$ a ses r premières colonnes nulles (f est nulle sur G si et seulement si f est nulle sur une base de G). On en déduit que $\mathscr{U}$ est en bijection avec les matrices de la forme $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & B \\ 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right)$ où B est une matrice quelconque de $M_{q,p-r}(\mathbb{K})$. Finalement $\dim \mathscr{U} = q(p-r)$.
   - → L'applcation est bien définie, linéaire. Elle est bijective puisque u est entièrement déterminée par sa restriction à deux sous-espaces supplémentaires, ici G (sur lequel u est nulle) et H). On en déduit que $\dim \mathscr{U} = q(p-r)$.

Exercice 8.19

1. On effectue les calculs et on trouve que $(AB)^2 = AB$. On a $\det(AB) = 0$ et les deux premières colonnes de AB ne sont pas colinéaires donc $\mathrm{rg}\,(AB) = 2$.
2. On a $(BA)^3 = BABABA = B(ABAB)A = BABA$. Si on note $C = BA$, on a $C^3 = C^2$. La matrice C est dans $M_2(\mathbb{R})$. On va justifier que C est inversible et ainsi $C^3 = C^2$ donnera $C = I_2$. On a $\mathrm{rg}\,(ABAB) = \mathrm{rg}\,(AB) = 2$ et $\mathrm{rg}\,(ABAB) = \mathrm{rg}\,(ACB) \leqslant \mathrm{rg}\,(C)$. Ainsi $\mathrm{rg}\,(C) \geqslant 2$. Finalement $\mathrm{rg}\,(C) = 2$ et C est inversbile.

Exercice 8.20

1. Par manipulation sur les lignes et les colonnes de M, on trouve :
   $$\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right).$$
   On en déduit que $\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\,(B - A)$.
2. Puisque $\mathrm{rg}\, A \leq n$ et $\mathrm{rg}\,(B-A) \leq n$, on a $\mathrm{rg}\, M = 2n$ si et seulement si $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\,(B-A) = n$. Il en résulte que la matrice M est inversible si et seulement si A et $B - A$ sont inversibles. Supposons que les matrices A et $A - B$ sont inversibles et déterminons l'inverse de la matrice M. On vous propose deux méthodes pour déterminer l'inverse de M.
   - → *Première méthode :* les manipulations précédentes peuvent être traduites en termes de produits par des matrices inversibles :
   $$\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right),$$
   $$\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right).$$
   En s'inspirant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$. On a donc
   $$\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)$$
   $$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B-A \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)^{-1} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_n & -I_n \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & (B-A)^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -I_n & I_n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} + (B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ \hline -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{array}\right). \end{aligned}$$

→ *Deuxième méthode :* Etant donnés X et Y deux vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^n$, résolvons le système d'équations $M\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$, d'inconnues U et V où U et V sont deux vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^n$. Ce système est équivalent au système $\begin{cases} AU+AV=X\\ AU+BV=Y\end{cases}$ qui équivaut successivement aux systèmes suivants : $\begin{cases} A(U+V)=X\\ A(U+V)+(B-A)V=Y\end{cases}$, puis $\begin{cases} A(U+V)=X\\ (B-A)V=Y-X\end{cases}$, ou encore $\begin{cases} U+V=A^{-1}X\\ V=(B-A)^{-1}(Y-X)\end{cases}$ et enfin

$$\begin{cases} U=A^{-1}X-(B-A)^{-1}(Y-X)\\ V=(B-A)^{-1}(Y-X)\end{cases}.$$

Comme le système $M\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ est équivalent à $M^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix}$, on en déduit $M^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}+(B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1}\\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1}\end{pmatrix}$.

Exercice 8.21

Si A est inversible, alors $AB=0$ entraîne $B=0$. On a donc le sens direct. Supposons A non-inversible et notons $r=\mathrm{rg}\,(A)<n$. Il existe P et Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A=PJ_rQ$. On a alors $AB=PJ_rQB$ et $BA=BPJ_rQ$. Soit C telle que $QBP=C$. On a alors $AB=P(J_rC)P^{-1}$ et $BA=Q^{-1}(CJ_r)Q$ (on effectue les changements de bases dans l'autre sens : on peut interpréter A comme la matrice d'une application linéaire f entre deux espaces vectoriels F et G munis de bases respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, B comme celle d'une application dans « l'autre sens »). Il suffit alors de prendre C telle que $CJ_r=J_rC=0$, par exemple $C=I_n-J_r$.

Exercice 8.22

1. On sait que $x\mapsto\sqrt{1+x}$ admet un dl à tout ordre en 0. Il existe un polynôme P_n de degré n tel que $\sqrt{1+x}=P_n(x)+\mathrm{o}(x^n)$ au voisinage de 0. En élevant au carré, on obtient (règles de calcul sur les dl), $1+x=P_n(x)^2+\mathrm{o}(x^n)$. Notons $Q_n=1+X-P_n^2$ - c'est un polynôme. Puisque $Q_n(x)=x^n\varepsilon(x)$ avec ε de limite nulle en 0, on en déduit que le terme de plus petit degré dans Q est au moins de degré n (sinon $Q_n(x)/x^n$ ne serait pas de limite nulle). Ainsi Q se factorise par X^n. On a donc un polynôme R_n tel que $1+X-P_n^2=X^nR_n$.
2. La matrice $N\in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente et son indice de nilpotence est donc au plus n - on a $N^n=0$. En reportant dans la formule précédente, on a $I_n+N-P_n(N)^2=0$. Avec $B=P_n(N)$, on a $B^2=I_n+N$.

Exercice 8.23

On sait que l'indice de nilpotence est au maximum n. Ainsi, $(A+\lambda_kB)^n$ est nulle pour tous les scalaires. On considère alors la matrice $(A+xB)^n$. Chacun de ses coefficients est un polynôme en x de degré au plus n. De plus, chacun de ces polynômes admet au moins $n+1$ racines. Tous les polynômes sont nuls. Finalement $(A+xB)^n$ est la matrice nulle. Pour $x=0$, on retrouve $A^n=0$. Pour $x\neq 0$, on peut factoriser pas x. Cela donne $x^n\left(\frac{1}{x}A+B\right)^n=0$. En posant $y=\frac{1}{x}$, on a $(yA+B)^n=0$ pour tout $y\neq 0$. Avec le même raisonnement, $(yA+B)^n=0$ tout le temps. Enfin on choisit $y=0$, ce qui donne $B^n=0$.

Exercice 8.24

1. Puisque les projecteurs sont non nuls, on a $\dim\mathrm{Im}\,p_i\geqslant 1$. Montrons que la somme des images est directe. Soit $p_1(x_1)+\ldots+p_(x_n)$ une décomposition de 0 dans la somme $\mathrm{Im}\,p_1+\ldots+\mathrm{Im}\,p_n$. En appliquant p_j, et en utilisant les relations de l'énoncé, il reste $p_j^2(x_j)=0=p_j(x_j)$. Ainsi chaque terme $p_j(x_j)$ est nul. Cela prouve le fait que la somme est directe. Puisqu'on dispose de n sous-espaces de dimension au moins 1 en somme directe, la dimension de la somme est au moins n, donc exactement n et $E=\mathrm{Im}\,p_1\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}\,p_n$. Au passage on a prouvé que chaque image est de dimension 1.
2. Si $\sum_{i=1}^m\lambda_ip_i=0$, en composant par p_j (à droite ou à gauche), il reste $\lambda_jp_j^2=0$, soit $\lambda_j=0$, pour tout $j\in[\![1\,;m]\!]$. La famille est donc libre (dans $\mathscr{L}(E)$).
3. Soit $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base adaptée à la décomposition $E=\mathrm{Im}\,p\oplus\ker p$ (les r premiers vecteurs forment une base de $\mathrm{Im}\,p$). La matrice de p dans cette base est
$$P=\begin{pmatrix}I_r & (0)\\ (0) & (0)\end{pmatrix}$$
Soit $f\in\mathscr{L}(E)$, dont la matrice dans cette même base est
$$Q=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$$
avec $A\in M_r(\mathbb{R})$, $B\in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C\in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D\in M_{n-r}(\mathbb{R})$. Les endomorphismes p et f commutent si, et seulement si, les matrices P et Q commutent. On a
$$P.Q=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}\text{ et }Q.P=\begin{pmatrix}A & 0\\ C & 0\end{pmatrix}$$
Les matrices commutent si et seulement si $C=0$ et $B=0$, c'est-à-dire $Q=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$. L'ensemble des matrices de cette forme est un espace vectoriel de dimension $r^2+(n-r)^2$.
4. On fixe une base et on travaille matriciellement. Une telle famille comporte moins de n^2 éléments. Les matrices E_{ii} conviennent, mais pas les matrices E_{ij} si $i\neq j$ (le carré vaut 0). En revanche $P_{ij}=E_{ii}+E_{ij}$ convient car
$$P_{ij}^2=E_{ii}^2+E_{ii}E_{ij}+E_{ij}E_{ii}+E_{ij}^2=E_{ii}+E_{ij}+0=P_{ij}.$$

On considère la famille des n matricess E_{ii} et des $n^2 - n$ matrices P_{ij} pour $i \neq j$. On montre qu'en réunissant ces familles (pas immédiat mais il suffit de l'écrire), on a une famille libre à n^2 projecteurs.

Exercice 8.25

- Soit $M \in \ker \Phi$ - on a $M = -\frac{b}{a} {}^tM$. En transposant, on a ${}^tM = -\frac{b}{a} M$ et en combinant, $M = \frac{b^2}{a^2} M$. Si $b^2 \neq a^2$ alors Φ est injective (et bijective). Si $b = a$, l'application devient $\Phi(M) = a(M + {}^tM)$ et toutes les matrices antisymétriques sont dans le noyau. Si $b = -a$, ce sont les matrices symétriques qui sont dans le noyau.
- On doit écrire la matrice de Φ dans une base de $M_n(\mathbb{R})$. La base canonique n'est pas très intéressante. En revanche, on peut utiliser une base adaptée à $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\Phi(M) = (a+b)M$ et si $M \in A_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi(M) = (a-b)M$. Dans cette base la matrice de Φ est diagonale avec $n(n+1)/2$ termes égaux à $a+b$ et $n(n-1)/2$ à $a-b$. Finalement, on a $\det \Phi = (a+b)^{n(n+1)/2}(a-b)^{n(n-1)/2}$ et $\mathrm{tr}\,\Phi = \frac{n(n+1)}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2}(a-b) = an^2 + nb$.