# 7 Algèbre linéaire

## I. Espaces vectoriels

### Sous-espaces vectoriels, construction

**L'essentiel** *(Opérations)*

→ **espace produit** : si $E_1,\dots,E_n$ sont des $\mathbb{K}$ sous-espaces vectoriels alors on munit l'ensemble produit $E = E_1\times\ldots\times E_n$ d'une structure d'espace vectoriel avec les opérations

1. $(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n) = (x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$
2. $\lambda.(x_1,x_2,\dots,x_n) = (\lambda.x_1,\lambda.x_2,\dots,\lambda.x_n)$

où $x_i$ et $y_i$ sont dans $E_i$ et $\lambda$ dans $\mathbb{K}$.

→ Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de $E$, l'intersection $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

→ Soit $A$ une partie (quelconque) de $E$, alors

- $F_1 = \bigcap_{\begin{cases}A\subset G\\ G \text{ sev de } E\end{cases}} G$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $A$
- $F_2 = \left\{x\in E, \exists n\in\mathbb{N}^*, a_1,\dots,a_n\in A, \lambda_1,\dots,\lambda_n\in K, x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right\} = \{\text{combinaisons linéaires d'éléments de } A\}$

existent et désignent le même sous-espace vectoriel de $E$ : on l'appelle sous-espace engendré par $A$ et on le note $\mathrm{Vect}(A)$ (avec la convention $F_2=\{0\}$ si $A$ est vide).

**Exemple**

L'ensemble $\mathscr{S} = \left\{\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}, (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. En effet $\mathscr{S}$ est l'ensemble des matrices sous la forme $aI_3+bJ_3$ où $J_3 = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Par conséquent $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(I_3,J_3)$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

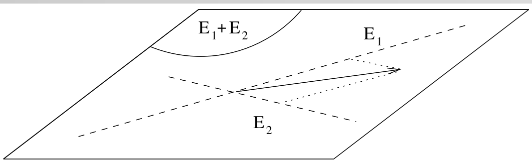
### Sommes, sommes directes

**L'essentiel** *(Sommes)*

→ Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On appelle somme de $F$ et $G$ le sous-espace vectoriel engendré par $F\cup G$. On le note $F+G$. On a $x\in F+G$ si et seulement si il existe $f\in F, g\in G, x=f+g$.

→ Soient $F_1,F_2,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On appelle somme de ces sous-espaces vectoriels, le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} F_i$. On le note $\sum_{i=1}^{n} F_i$. On a $x\in\sum_{i=1}^{n} F_i$ si et seulement si il existe $x_1\in F_1?\dots,x_n\in F_n$ tels que $x=x_1+\ldots+x_n$.

**Exemple** *(Somme)*




Sur cet exemple, on distingue deux droites $E_1$ et $E_2$. Leur union n'est pas un espace vectoriel. On retrouve bien sur ce dessin la définition de la somme ainsi que le fait que $E_1+E_2$ correspond au plus petit sous-espace vectoriel qui contient $E_1$ et $E_2$ (le plan défini par ces deux droites).

**Exercice 1**

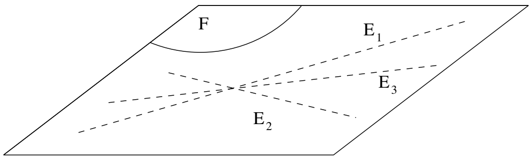
Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un $K$-espace vectoriel $E$. Montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si, et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

**L'essentiel** *(Sommes directes)*

→ les espaces $F$ et $G$ sont en somme directe lorsque $F \cap G = \{0\}$. On note cette sommes $F \oplus G$. On a équivalence entre
- la somme $F + G$ est directe ($F \cap G = \{0\}$),
- tout vecteur de $F + G$ s'écrit de façon unique $x = f + g$ avec $f \in F, g \in G$,
- si $0_E = f + g$ avec $f \in F, g \in G$ alors $f = g = 0_E$.

→ les espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe *si et seulement si* (les propriétés sont équivalentes)
- tout $v \in \sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ s'écrit de façon unique sous la forme $v = f_1 + \ldots + f_n \quad$ avec $\quad f_i \in F_i$.
- le vecteur $0_E$ s'écrit de façon unique : la seule décomposition du vecteur nul $0_E$ en $0_E = f_1 + \ldots + f_n$ avec $f_i \in F_i$ est la décomposition où tous les vecteurs $f_i$ sont nuls,
- pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $F_i \bigcap \left( \sum\limits_{j \neq i} F_j \right) = \{0\}$ (version symétrique),
- pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $F_i \bigcap \left( \sum\limits_{j < i} F_j \right) = \{0\}$ (ajout à la suite des précédents).

**Exemple** *(Sommes directes et non directes)*




Sur cet exemple, on remarque 3 droites situées dans un même plan $F$. Les droites sont 2 à 2 en somme directe (les intersections 2 à 2 sont réduites à $\{0\}$) et $F = E_1 \oplus E_2 = E_2 \oplus E_3 = E_1 \oplus E_3$. En revanche on a simplement $F = E_1 + E_2 + E_3$ mais ces droites ne sont pas en somme directe.

**Sommes directes**

Pour montrer qu'une somme de plusieurs sous-espaces vectoriels est directe, il n'est surtout pas suffisant de montrer que les intersections deux à deux sont réduites à $\{0\}$.

**Exemple**

Sommes directes usuelles

→ $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$,

→ $\mathbb{K}[X] = P.K\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X]$ si $P$ est un polynôme de degré $n$,

→ $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p = \ker p \oplus \ker(p - \operatorname{Id})$ si $p$ est un projecteur

**Exercice 2**

Soient $E = \sum\limits_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} F_i$ deux décompositions de $E$. On suppose que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on a $E_i \subset F_i$.

1. Montrer que la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} E_i$ est directe.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on a $E_i = F_i$.

**Exercice 3**

Soit $F, G$ et $H$ trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$. On suppose que

$$F \cap G \subset F \cap H, \qquad F + G \subset F + H, \qquad H \subset G.$$

Montrer que $H = G$.

**Exercice 4** *(Supplémentaires et intersection)*

Soit $A$ et $B$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$. Soit $C$ un supplémentaire de $A \cap B$ dans $B$. Montrer que $A$ et $C$ sont supplémentaires dans $A + B$.

## II. FAMILLES DE VECTEURS

**L'essentiel** *(Familles libres et génératrices)*

- → $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs est génératrice de $F$ lorsque tout vecteur de $F$ s'écrit comme combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathscr{F}$ - cela revient à $\text{Vect}(\mathscr{F}) = F$,
- → une famille génératrice reste génératrice lorsqu'on lui ajoute des vecteurs,
- → Soit $\mathscr{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille de vecteurs de $E$. On dit que la famille $\mathscr{F}$ est libre (ou que les vecteurs sont linéairement indépendants) lorsque
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$
Cela revient à dire que la seule relation linéaire nulle entre les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ est la relation triviale (c'est-à-dire avec des coefficients tous nuls).
- → Une famille $\mathscr{F}$ quelconque de vecteurs est libre lorsque toutes ses sous-familles finies sont libres.
- → Une famille de vecteurs est liée lorsqu'elle n'est pas libre. Cela signifie qu'il existe des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ de $\mathscr{F}$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ ou encore que l'un des vecteurs de $FCC$ est une combinaison linéaires d'autres vecteurs de $\mathscr{F}$.

**vecteur dans une famille liée**

Lorsqu'une famille est liée, l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres MAIS on ne sait pas lequel (on ne peut pas forcément prendre celui qui nous arrange sans justification). De même tout vecteur de la famille n'est pas forcément combinaison linéaire des autres.

**Propriété 1** *(Familles libres et liées)*

- → Si $\mathscr{F}$ est une famille libre de vecteurs, alors toute famille extraite de $\mathscr{F}$ est encore une famille libre.
- → La famille $\{x\}$ est liée si et seulement si $x$ est le vecteur nul.
- → Si on ajoute des vecteurs à une famille liée, alors elle reste liée.
- → On famille qui contient le vecteur nul ou deux fois le même vecteur est liée.
- → si la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe alors pour tout $x_1 \in F_1, \ldots, x_n \in F_n$ **non nuls**, la famille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est libre.
- → dans un sous-espace vectoriel $F$ engendré par une famille $(v_1, \ldots, v_n)$, toute famille comprenant au moins $n+1$ vecteurs est liée.

**Méthode** *(Techniques pour montrer l'indépendance linéaire)*

On suppose que l'on dispose d'une famille de vecteurs $v_1, \cdots, v_n$ (qui est éventuellement une sous-famille d'une famille infinie) et on cherche à montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants.

- → On part d'une relation
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \qquad (*),$$
et on cherche à montrer que tous les $\lambda_i$ sont nuls.
- → On peut essayer de montrer qu'ils sont nuls en conservant toujours la relation totale ou alors on peut essayer de montrer que l'un est nul et repartir de la nouvelle relation obtenue (à comprendre sur des exemples).
- → Parfois on peut être amené à faire une récurrence sur le nombre d'éléments de la famille

**Méthode** *(Familles de $\mathbb{K}^n$)*

- → Lorsque les vecteurs sont échelonnés, la famille est libre.
- → La méthode la plus immédiate si on a les coordonnées des vecteurs est d'écrire la relation $(*)$ sous forme d'un système d'équations linéaires et de résoudre.
- → On peut trigonaliser le système pour arriver au but (le rendre triangulaire supérieur ou inférieur) - sauf si c'est déjà fait, dans ce cas c'est encore plus simple. . . .
- → On peut étudier l'application linéaire associée à ces vecteurs ou la matrice associée et prouver que son rang est le nombre de vecteurs. Dans le cas où la matrice est carrée, on peut calculer son déterminant.

**Méthode** *(Familles de polynômes)*

- → Si la famille est échelonnée en degré, alors elle est libre.
- → Si la famille est échelonnée en valuation (indice du premier coefficient non nul), alors elle est libre.
- → On peut chercher une valeur qui annule tous les polynômes sauf un (raisonnement par orthogonalité).

**Méthode** *(Familles de fonctions)*

- → Étude locale : on regarde les singularités en un point (l'une n'est pas dérivable), les développements limités, des valeurs.
- → Étude à l'infini : on regarde si la croissance de l'une des fonctions n'est pas supérieure à toutes les autres (relations de comparaisons).
- → Raisonnement par orthogonalité : on cherche des valeurs qui annulent toutes les fonctions sauf une.
- → Dérivation : si les fonctions sont suffisamment régulières, on peut dériver la relation $(*)$ pour obtenir de nouvelles relations.

**Exercice 5**

Prouver l'indépendance des familles suivantes :

→ $f_{\alpha_i} : x \mapsto e^{\alpha_i x}$ où $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
→ $f_{\alpha_i} : x \mapsto \sin(\alpha_i x)$ où $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
→ $f_{a_i} : x \mapsto |x - a_i|$ où $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
→ $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$ pour $k$ allant de 0 à $n$ dans $\mathbb{R}[X]$.

## III. DIMENSION FINIE

**L'essentiel** *(Dimension finie)*

→ l'espace $E$ est dit de dimension finie lorsqu'il possède une partie génératrice finie.
→ si $E$ est un espace vectoriel admettant une partie génératrice $\mathscr{G}$ finie, alors $E$ admet une base finie. On montre alors que toutes les bases de $E$ possèdent le même nombre de vecteurs. Ce nombre commun est appelé dimension de $E$.
→ si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, alors $F$ est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. De plus $E = F$ si et seulement si le sous-espace $F$ est de même dimension que $E$.
→ $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$ (se généralise à un produit de $n$).

**L'essentiel** *(Bases en dimension finie)*

→ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathscr{F}$ une famille de $n$ vecteurs alors, on a l'équivalence entre les propriétés
- $\mathscr{F}$ est une famille libre,
- $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $E$,
- $\mathscr{F}$ est une base de $E$.

→ **théorème de la base incomplète** : soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathscr{F} = \{e_1, \dots, e_p\}$ une famille libre de vecteurs de $E$.
- il existe des vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n\}$ qui complète $\mathscr{F}$ en une base de $E$.
- si $\mathscr{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ est une base de $E$, alors on peut compléter $\mathscr{F}$ en une base de $E$ en choisissant les vecteurs dans $\mathscr{B}$.

→ si $F$ est un sous-espace vectoriel d'un espace $E$ de dimension finie alors il admet au moins un supplémentaire dans $E$ : il existe $G$ tel que $F \oplus G = E$.

**L'essentiel** *(Dimension et sommes)*

Soient $F, G, F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie :

→ $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim G$ et $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.
→ $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim G - \dim(F \cap G)$.
→ Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ de dimension finie. Les sous-espaces $F$ et $G$ sont supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
→ si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, alors $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

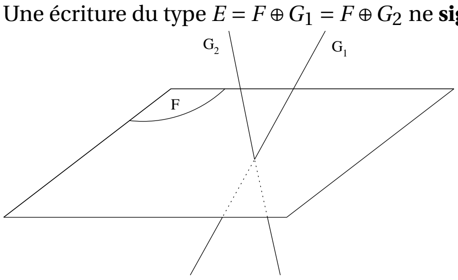
**Méthode** *(prouver l'égalité de deux sous-espaces vectoriels)*

Comment prouver que 2 (sous-)espaces vectoriels $F$ et $G$ sont égaux? Les deux possibilités sont :

1. soit de montrer une double inclusion (jamais une égalité directe), $F \subset G$ puis $G \subset F$.
2. soit de prouver l'une des inclusions, puis de montrer que les deux espaces sont de même dimension (par le théorème du rang, la dimension d'une somme, ou tout autre résultat provenant de l'énoncé).

**Erreurs interdites**

→ Pour montrer que deux espaces sont égaux, il ne suffira **jamais** de montrer qu'ils sont de même dimension.
→ Une écriture du type $E = F \oplus G_1 = F \oplus G_2$ ne **signifie pas** que $G_1 = G_2$ :




L'espace se décompose bien comme somme directe de $F \oplus G_1$ ou de $F \oplus G_2$ mais il est clair que $G_1$ et $G_2$ sont différents.

**Définition 1** *(base adaptée à une décomposition)*

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$ des espaces supplémentaires (avec $F_i \neq \{0\}$ pour tout $i$). Si

$$\begin{cases} \mathscr{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_{p_1}\} & \text{est une base de } F_1 \\ \mathscr{B}_2 = \{e_{p_1+1}, \ldots, e_{p_2}\} & \text{est une base de } F_2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathscr{B}_1 = \{e_{p_{n-1}+1}, \ldots, e_{p_n}\} & \text{est une base de } F_n \end{cases}$$

Alors $\mathscr{B} = (e_i)_{i=1,\ldots,N}$ avec $N = p_n$ est une base de $E$ appelée *base adaptée à la décomposition* $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

**Exercice 6**

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $F = \{(x,y,z,t)/x+y+z+t=0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1,-1,1,1),(0,1,2,3)\}$. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

**Exercice 7**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $H$ l'ensemble des polynômes $P$ de $E$ tels que $P(1) = P'(1) = 0$.

1. Montrer que $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. Donner une base de $H$ et déterminer sa dimension.

## IV. APPLICATIONS LINÉAIRES

**L'essentiel** *(Notations, propriétés)*

On note

- → $(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $E$ vers $F$, $(\mathscr{L}(E),+,\cdot,\circ)$ l'algèbre des endomorphismes de $E$, $(GL(E),\circ)$ le groupe des automorphismes de $E$, $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur $E$ (appelé espace dual de $E$).
- → $\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, f(x) = 0\}$ le noyau de $f$,
- → $\text{Im}\, f = f(E) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$
- → si $E$ et $F$ sont de dimension finie, alors $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$. Notamment $\dim E^* = \dim E$.

**Exercice 8**

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire entre les deux espaces vectoriels $E$ et $F$. Soient $E_1$ et $E_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ et $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces vectoriels de $F$.

1. Justifier que $f(E_1)$ (et $f(E_2)$) est un sous-espace vectoriel de $F$.
2. Justifier que $f^{-1}(F_1)$ (et $f^{-1}(F_2)$) est un sous-espace vectoriel de $E$.
3. Que peut-on dire de $f(E_1+E_2)$, $f(E_1 \cap E_2)$ par rapport à $f(E_1)$ et $f(E_2)$ ?
4. Même question avec $f^{-1}(F_1+F_2)$ et $f^{-1}(F_1 \cap F_2)$.

### CONSTRUCTION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

**L'essentiel**

- → si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $f_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$ alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que,pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $f_{|E_i} = f_i$,
- → si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $E$ et $(f_1,\ldots,f_n)$ des vecteurs de $F$, alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $f(e_i) = f_i$.

**Méthode** *(Égalité de deux applications linéaires)*

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour montrer qu'elles sont égales :

- → on montre que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$ (elles coïncident partout)
- → si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ : pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ et pour tout $x \in E_i$, $f(x) = g(x)$ (elles coïncident sur des sev supplémentaires),
- → si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $E$ : pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $f(e_i) = g(e_i)$ (elles coïncident sur une base).

### IMAGE DE FAMILLES

**L'essentiel**

- → l'injectivité conserve l'indépendance linéaire : L'image d'une famille libre par une application injective reste libre
- → la surjectivité conserve le caractère générateur : l'image d'une famille génératrice de $F$ est une famille génératrice de $f(F)$
- → si $f$ est bijective de $E$ sur $F$ alors l'image de toute base de $E$ par $f$ est une base de $F$,
- → s'il existe une base de $E$ dont l'image par $f$ est une base de $F$ alors $f$ est bijective,
- → deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension

### PROJECTEURS

**L'essentiel** *(Projecteurs et projections)*

- → **projections :** si $E = F \oplus G$. L'application $p$ qui a $x = f + g$ ($f \in F$ et $g \in G$) associe $f$ est linéaire. C'est la projection sur $F$ parallèlement à $G$. Elle vérifie $p \circ p = p$, $\operatorname{Im} p = F$, $\ker p = G$ et $x \in \operatorname{Im} p$ si et seulement si $p(x) = x$ (ce qui revient à $\operatorname{Im} p = \ker(f - \mathrm{Id})$
- → **projecteurs :** on appelle projecteur toute application $p \in \mathscr{L}(E)$ telle que $p \circ p = p$. On a alors $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ et $p$ est la projection sur $F = \operatorname{Im} p$ de direction $G = \ker p$. Notamment $\operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{Id})$ c'est-à-dire que $x \in \operatorname{Im} p$ si et seulement si $p(x) = x$
- → **projecteurs associés :** si $p$ est un projecteur (sur $F$ parallèlement à $G$) alors $q = \mathrm{Id} - p$ est le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$, appelé projecteur associé à $p$,
- → **projecteurs associés à une décomposition :** si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, la famille de projecteurs associée à cette décomposition est la famille de projecteurs $(p_1, \dots, p_n)$ telle que $p_i$ est le projecteur sur $E_i$ parallèlement à la somme $\bigoplus_{j \neq i} E_j$. Le projecteur $p_i$ est l'application qui donne la composante d'un vecteur dans $E_i$ lorsque ce vecteur est décomposé dans la somme $\bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

**Remarque :** La caractérisation de l'image en tant que $\ker(p - \mathrm{Id})$ est très intéressante : plutôt que de chercher un antécédent pour $y \in E$ afin de savoir qu'il est dans $\operatorname{Im} p$, il suffit de calculer $p(y)$ et vérifier que $p(y) = y$.

**Exercice 9**

Soient $p$ et $q$ deux projecteurs tels que $p \circ q = 0$. On pose $r = p + q - q \circ p$. Montrer que $r$ est un projecteur et déterminer $\operatorname{Im} r$ et $\ker r$ en fonction des noyaux et images de $p$ et $q$.

**Exercice 10**

Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$. Montrer l'équivalence

$$\begin{cases} \ker f = \ker g \text{ et} \\ f \text{ et } g \text{ sont des projecteurs} \end{cases} \iff \begin{cases} f = f \circ g \\ g = g \circ f \end{cases}$$

**Exercice 11**

(diagonalisation cachée) Soit $E$ un espace vectoriel, $a$ et $b$ deux éléments de $\mathbb{K}$ distincts et $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant

$$(u - a\mathrm{Id}_E) \circ (u - b\mathrm{Id}_E) = 0.$$

1. Montrer que $p = \dfrac{u - a\mathrm{Id}_E}{b - a}$ et $q = \dfrac{u - b\mathrm{Id}_E}{a - b}$ sont deux projecteurs associés de $E$.
2. Calculer $u^n$ ($n \in \mathbb{N}$) à l'aide de $p$ et $q$.
3. On suppose que $a.b \neq 0$, en déduire $u^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer qu'on peut écrire $E = E_a \oplus E_b$ avec pour tout $x \in E_a$, $u(x) = ax$ et pour tout $x \in E_b$, $u(x) = bx$.

### RANG

**L'essentiel** *(Rang)*

- → le rang d'une famille de vecteurs $\mathscr{F}$ est la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ lorsqu'elle est finie,
- → le rang d'une application linéaire est la dimension de son image lorsqu'elle est finie,
- → si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec $E$ de dimenion finie et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$ alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$
- → on a $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$
- → si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$ si $g \in \mathrm{GL}(F)$ et $\operatorname{rg}(f \circ h) = \operatorname{rg} f$ si $h \in \mathrm{GL}(E)$ (on ne change pas le rang en composant par un automorphisme).

**Théorème 1** *(Theorème du rang)*

Soient $E$ et $F$ deux $K$-espaces vectoriels. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si $H$ est un supplémentaire de $\ker f$ dans $E$ alors l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & \operatorname{Im} f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme. Dans le cas où $E$ est de dimension finie, cela donne $\dim E = \dim\ker f + \operatorname{rg} f$.

**Exercice 12**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme $f$ de $E$ tel que $\operatorname{Im} f = G$ et $\ker f = F$.

**Propriété 2**

→ Soit $f$ une application entre deux espaces vectoriels *de même dimension finie* (par exemple $u$ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie). On a l'équivalence entre
- $f$ est bijective.
- $f$ est surjective.
- $f$ est injective.

→ Soit $f$ un endomorphisme de $E$ de *dimension finie* alors on a l'équivalence
- $f$ est inversible (il existe $g$ tel que $f \circ g = g \circ f = id$).
- $f$ est inversible à droite (il existe $g$ tel que $f \circ g = id$).
- $f$ est inversible à gauche (il existe $g$ tel que $g \circ f = id$).

**Erreurs sur cette équivalence**

→ Ce corollaire est extrêmement pratique pour montrer facilement que certaines applications linéaires (en général ce sera des endomorphismes) sont bijectives : plutôt que de montrer les deux aspects (injectif et surjectif), un seul sera suffisant, ce qui en général réduit le travail de plus de la moitié (souvent l'un des aspects est très simple à montrer, l'autre plus compliqué).

→ **NE JAMAIS** utiliser ce théorème si les espaces ne sont pas de même dimension, ou si les espaces sont de dimension infinie, c'est entièrement faux !!!

**Exercice 13**

Soient des entiers $n$ et $p$ tels que $0 < p \leqslant n$. Soit $f$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et soit $g$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ telles que $f \circ g = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^p}$. Donner le rang et la nature de $g \circ f$.

**Méthode** *(Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel)*

Pour déterminer la dimension de $F$ sev de $E$ :

→ on détermine une base et son cardinal,

→ on utilise les formules de Grassman (dimension d'une somme)

→ on utilise le théorème du rang si cet espace est une image ou un noyau

→ on explicite un isomorphisme avec un espace vectoriel connu

**Exemple**

Soit $F$ l'ensemble des matrices de $M_{2n}(\mathbb{R})$ sour la forme $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A$ et $B$ sont deux matrices quelqconques de $M_n(\mathbb{R})$ : on considère l'application $\varphi : (A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \in F$. On montre que c'est un isomorphisme entre les deux espaces vectoriels. On en déduit que $\dim F = \dim(M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})) = \dim M_n(\mathbb{R}) + \dim M_n(\mathbb{R}) = 2n^2$.

**Exercice 14** *(endomorphisme de rang 1)*

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $v$ et une forme linéaire $\varphi$ sur $E$ tels que, pour tout $x \in E$, on a $u(x) = \varphi(x).v$.
2. En déduire $u^n$ en fonction de $u$ et $\varphi(v)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 15**

Soit $E, F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, ainsi que $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que $\dim\ker g \circ f \leqslant \dim\ker g + \dim\ker f$.

*indication : on considérera la restriction de $f$ à $\ker g \circ f$.*

**Exercice 16**

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$ de rang 1. Que peut-on dire du rang de $u+v$ ?

**Exercice 17**

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie. Montrer alors

$$|\mathrm{rg}\, u - \mathrm{rg}\, v| \leqslant \mathrm{rg}\,(u+v) \leqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v.$$

En déduire que si $u$ et $v$ vérifient $u \circ v = 0$ et $u+v$ inversible alors $\mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v = \dim E$.

### POLYNÔMES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

**L'essentiel**

- soient $x_0, \cdots x_n$ des réels **deux à deux distincts**. Pour tout $n+1$-uplet $(y_0, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour $i \in [\![0;n]\!]$ on a $P(x_i) = y_i$ : l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), \cdots, P(x_n)) \end{array} \right.$$

est linéaire et bijective.

- avec $L_i = \prod_{j \neq i} \left( \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$, on a, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$. Notamment, le polynôme correspondant au résultat précédent est $P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$.

## V. FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

**L'essentiel** *(Hyperplans)*

- $H$ est un hyperplan de $E$ lorsqu'il admet une droite supplémentaire
- si $H$ est un hyperplan, alors pour tout $x \notin H$, la droite $\mathrm{Vect}(x)$ est un supplémentaire de $H$,
- $H$ est un hyperplan si et seulement si il existe $\varphi$ est une forme linéaire non nulle sur $E$ telle que $H = \ker \varphi$. L'équation « $\varphi(x) = 0$ » est une équation de l'hyperplan $H$
- Si $H = \ker \varphi = \ker \psi$ est un hyperplan alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda \varphi$ (les équations sont proportionnelles)
- si $\psi \in E^*$ est nulle sur $H = \ker \phi$ alors il existe $\lambda \in K$ tel que $\psi = \lambda \varphi$

**L'essentiel** *(Hyperplans en dimension finie)*

Soit $E$ de dimension $n$

- $H$ est un hyperplan si et seulement si $\dim H = n-1$,
- si $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont $p$ formes linéaires et $H_i = \ker \varphi_i$ alors $H = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ est de dimension supérieure à $n-p$,
- si $H$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ alors il existe $p$ hyperplans tels que $H = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$
- plus généralement, $\dim \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i = n - \dim \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

**Exercice 18**

Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E, \int_0^1 f(t)\, dt = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1_{\mathbb{R}})$ ($1_{\mathbb{R}}$ est la fonction constante égale à 1).

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

## VI. EXERCICES

**Exercice 19**

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On note $F = \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $H = \{P \in E, P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

**Exercice 20** *(Mines MP)*

Soit $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$. Déterminer le noyau, l'image et le rang de $f$.

**Exercice 21**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que si $H$ est un sous-espace de $E$ alors
$$\dim f(H) = \dim H - \dim(H \cap \ker f).$$
2. Montrer que si $K$ est un sous-espace de $F$ alors
$$\dim f^{-1}(K) = \dim(K \cap \operatorname{Im} f) + \dim(\ker f).$$

**Exercice 22**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $p$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer que $f$ est nilpotent, c'est à dire qu'il existe $n$ tel que $f^n = 0$.

**Exercice 23**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $a$ tel que $(f(a), f^2(a), \cdots, f^n(a))$ soit une base de $E$.

1. Montrer que $f$ est bijective, puis que $(a, f(a), f^2(a), \cdots, f^{n-1}(a))$ est une base de $E$.
2. Montrer qu'il existe des constantes $a_0, \cdots, a_{n-1}$ telles que
$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{Id} = 0.$$
*Indication :* commencer par regarder $f^n(a)$.
3. Soit $g$ un endomorphisme de $E$ qui commute avec $f$. Montrer qu'on peut trouver des constantes $b_0, \cdots, b_{n-1}$ telles que $g = b_{n-1}f^{n-1} + \cdots + b_1 f + a_0 \mathrm{Id}$.

**Exercice 24** *(Commutant)*

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Déterminer les $f$ de $\mathscr{L}(E)$ tels que $(x, f(x))$ soit liée pour tout $x$ de $E$.
2. Déterminer le commutant de $\mathscr{L}(E)$.
3. Déterminer le commutant de $GL(E)$.

**Exercice 25** *(Mines MP)*

Soit $n \geqslant 2$, $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$. On note $F$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ engendré par les polynômes $(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n-1))$. On considère l'application $\Delta$ sur $\mathbb{R}[X]$ définie par $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^k P \in F$.
2. Montrer que la famille $(P(X), P(X+1), \ldots, P(X+n-1))$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,
$$Q(X) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k Q(X+k)$$
.

**Exercice 26** *(Mines MP 2013)* ✰

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit $f_\sigma$ l'endomorphisme de $E$ défini par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ si $i \in [\![1\,;n]\!]$.

1. Nature géométrique de $f_\sigma$ lorsque $\sigma$ est une transposition ?
2. On pose $p = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma$. Déterminer la nature géométrique de $p$, son noyau et image.

**Exercice 27**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe une projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ et un automorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = g \circ p$.
2. Montrer qu'il existe une projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ et un automorphisme $g \in GL(E)$ tels que $f = p \circ g$.

**Exercice 28** *(Centrale MP 2010)* ✩

Soit $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie, $f$ et $g$ dans $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$ si, et seulement s'il existe $h \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f = g \circ h$. Montrer qu'on peut choisir $h$ tel que $\operatorname{rg} h = \operatorname{rg} f$.
2. Montrer que deux quelconques des propriétés suivantes entraînent la troisième :
   (a) $f \circ g \circ f = f$,
   (b) $g \circ f \circ g = g$,
   (c) $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, l'ensemble des applications $g$ vérifiant les propriétés précédentes n'est pas vide.

**Exercice 29** ✩

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Montrer que si $F_1, \dots F_p$ sont des sous-espaces stricts de $E$ alors leur union est distincte de $E$.
2. Soit $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces de $E$ de dimension finie $n$, tous de même dimension $r$. Montrer qu'ils admettent un supplémentaire commun.

**Exercice 30** *(Mines MP)* ✩

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces stricts de $E$. Montrer que $F \cup G \neq E$.
2. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces de $E$ de même dimension. Montrer que $F$ et $G$ admettent un supplémentaire commun.
3. Déterminer toutes les applications $d$ sur l'ensemble des ssev de $E$ (dim finie) telle que $d(F + F') = d(F) + d(F')$ si $F \cap F' = \{0\}$.