

## CHAPITRE 7 - ALGÈBRE LINÉAIRE

## Exercice 7.1

Supposons qu'il n'y ait aucune des deux inclusions. On considère  $x \in F \setminus G$  et  $y \in G \setminus F$ . Les vecteurs  $x$  et  $y$  sont dans  $F \cup G$  qui est un sous-espace vectoriel par hypothèse. Ainsi  $x + y \in F \cup G$ . Si  $x + y \in F$ , puisque  $x \in F$ , par différence  $y \in F$  d'où une contradiction. Ainsi  $x + y \in G$  et par différence avec  $y \in G$ , on obtient la contradiction  $x \in G$ . L'un des deux sous-espaces est inclus dans l'autre.

## Exercice 7.2

1. Soit  $0 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$  une décomposition dans la somme  $\sum_{i=1}^n E_i$ . C'est aussi une décomposition de 0 dans la somme directe  $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ . Ainsi, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $e_i = 0$ .
2. On choisit  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . par hypothèse  $E_j \subset F_j$ . On prouve l'inclusion contraire. Soit  $x \in F_j$ . Puisque  $x \in E$ , il se décompose en  $x = x_1 + \dots + x_n$  avec  $x_i \in E_i$ . Or cette décomposition est également une décomposition de  $x$  dans la somme directe  $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ . Dans cette somme directe  $x$  se décompose également en  $x = 0 + \dots + 0 + x + 0 + \dots + 0$  (où  $x$  est en position  $j$ , dans  $F_j$ ). Par unicité de la décomposition, on a  $x_i = 0$  si  $i \neq j$  et  $x_j = x$ . Par construction  $x_j \in E_j$ .

## Exercice 7.3

Soit  $x \in G$ . On a  $x \in F + G$  donc  $x \in F + H$ . On peut le décomposer en  $x = f + h$  avec  $f \in F$  et  $h \in H$ , donc  $h \in G$ . Ainsi  $f = x - h$  est aussi dans  $G$ . Cela donne  $f \in F \cap G \subset F \cap H$ . On obtient alors  $f \in H$ . Finalement  $x = f + h \in H$ .

## Exercice 7.4

- Puisque  $C \subset B$ , on a  $A + C \subset B + C$ .
- On prouve l'inclusion inverse. Soit  $x \in A + B$ . Il existe  $a \in A$  et  $b \in B$  tel que  $x = a + b$ . Puisque  $b \in B = (A \cap B) \oplus C$ , il se décompose en  $b = \alpha + c$  où  $\alpha \in A \cap B$ , d'où  $\alpha \in A$ . Ainsi  $x = a + \alpha + c \in A + C$ . On a l'inclusion inverse. Finalement  $A + C = A + B$ .
- On prouve que la somme est directe. On sait que  $(A \cap B) \cap C = \{0\} = A \cap B \cap C$ . Or  $C \subset B$ , donc  $B \cap C = C$ . Ainsi  $A \cap B \cap C = A \cap C = \{0\}$ .

Finalement  $A \oplus C = A + B$ .

## Exercice 7.5

1. On considère une relation  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ . On suppose qu'elle n'est pas triviale, et note  $k$  l'indice maximal tel que  $\lambda_i \neq 0$  (on a  $\lambda_k \neq 0$  et  $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ ). On va montrer une contradiction. On utilise le comportement en  $+\infty$ . La dernière fonction est celle qui domine toutes les autres. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + \lambda_k e^{\alpha_k x} = 0,$$

et, en divisant par  $e^{\alpha_k x}$  on obtient, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lambda_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_k)x} + \lambda_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_k)x} + \dots + \lambda_{k-1} e^{(\alpha_{k-1} - \alpha_k)x} + \lambda_k = 0.$$

Lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , il reste  $\lambda_k = 0$  (puisque  $\alpha_i - \alpha_k < 0$  si  $i < k$ ). Cela contredit la maximalité de  $k$ . Il n'y a donc pas de scalaire non nul dans la somme. La famille est libre.

2. On peut le démontrer par récurrence sur le nombre d'éléments de la famille. On note  $\mathcal{P}(n)$  la proposition « pour toute famille de réels  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ , les fonctions  $f_{\alpha_i}$  sont linéairement indépendantes ». La proposition est vérifiée pour au rang 1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{P}(n)$ . On considère une famille de fonctions  $f_{\alpha_i}$  à  $n+1$  éléments (ordonnés comme au dessus). On considère une combinaison linéaire  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$ .

On dérive cette relation deux fois, ce qui donne la nouvelle relation  $-\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \alpha_i^2 f_{\alpha_i} = 0$ . On ajoute à cette relation la première relation multipliée par  $\alpha_{n+1}^2$ . Il reste

$$\sum_{i=1}^n \left( \lambda_i (\alpha_{n+1}^n - \alpha_i^2) \right) f_i = 0.$$

L'hypothèse au rang  $n$  donne, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\lambda_i (\alpha_{n+1}^n - \alpha_i^2) = 0$ , et, puisque  $\alpha_{n+1}^n - \alpha_i^2 \neq 0$ ,  $\lambda_i = 0$ . On repart de la première relation dans laquelle reste  $\lambda_{n+1} f_{\alpha_{n+1}} = 0$ . Le dernier scalaire est également nul. La propriété  $\mathcal{P}(n+1)$  est vérifiée. Par récurrence le résultat est démontré.

3. On part d'une relation  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i} = 0$ . On regarde au voisinage d'un point  $a_i$ . En ce point la somme est nulle donc dérivable. Si le coefficient  $\lambda_i$  est non nul, la somme n'est pas dérivable en  $a_i$  d'où une contradiction (les autres termes sont localement  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $a_i$  - on retire les valeurs absolues).

## Exercice 7.6

Soit  $u \in F \cap G$ . D'une part, il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $u = \lambda(1, -1, 1, 1) + \mu(0, 1, 2, 3)$ , c'est-à-dire

$$u = (\lambda, -\lambda + \mu, \lambda + 2\mu, \lambda + 3\mu),$$

et d'autre part ce vecteur est dans  $F$ , soit

$$(\lambda) + (-\lambda + \mu) + (\lambda + 2\mu) + (\lambda + 3\mu) = 0 = 2\lambda + 6\mu.$$

Ainsi,  $u = \lambda(1, -1, 1, 1) + \mu(0, 1, 2, 3) \in G$  est également dans  $F$  si, et seulement si,  $\lambda = -3\mu$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{-3\mu(1, -1, 1, 1) + \mu(0, 1, 2, 3), \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mu(-3, 4, -1, 0), \mu \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-3, 4, -1, 0)). \end{aligned}$$

Pour déterminer  $F + G$ , on sait que  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4$  ( $F$  est un hyperplan, donc est de dimension 3, et la famille donnée pour définir  $G$  est bien entendu génératrice, mais également libre). Ainsi  $F + G = \mathbb{R}^4$ .

### Exercice 7.7

1. Le polynôme nul est dedans, et la statibilité par combinaisons linéaires se fait facilement
2.  $P$  est dans  $H$  si et seulement si il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P = (X - 1)^2 Q$  et  $\deg P \leq n$ . Cela est équivalent à  $P = (X - 1)^2 Q$  avec  $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ . On a comme bases possibles  $((X - 1)^2 X^k)_{k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket}$  ou  $((X - 1)^k)_{k \in \llbracket 2; n \rrbracket}$  (en fait  $(X - 1)^2$  fois n'importe quelle base de  $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ ). Ces bases comportent toutes  $n - 1$  éléments donc  $\dim H = n - 1$ .

### Exercice 7.8

Dans le cours

### Exercice 7.9

On vérifie que  $r \circ r = 0$  (calcul direct). On constate que, pour  $x \in E$ ,  $r(x) = p(x) + q(x) - q \circ p(x) = p(x) + q(x - p(x)) \in \text{Im } p + \text{Im } q$ . Cela donne  $\text{Im } r \subset \text{Im } p + \text{Im } q$ . Pour montrer la réciproque, on choisit  $z = p(x) + q(y) \in \text{Im } p + \text{Im } q$  et on vérifie que  $z$  est invariant par  $r$  (c'est plus simple). Pour le noyau, on a directement  $\ker p \cap \ker q \subset \ker r$ . Réciproquement, si  $p(x) + q(x) - q \circ p(x) = 0$ , en appliquant  $p$ , il reste  $p(x) = 0$ . En réinjectant, on a  $q(x) = 0$  d'où l'inclusion réciproque.

### Exercice 7.10

- *sens direct* : puisque  $E = \ker f \oplus \text{Im } f = \ker g \oplus \text{Im } g$ , il suffit de vérifier que  $f$  et  $f \circ g$  coïncident sur deux espaces supplémentaires. Pour  $x \in \ker f = \ker g$ , on a  $f(x) = 0 = f \circ g(x)$ . Pour  $x \in \text{Im } g$ , on a  $g(x) = x$  et  $f \circ g(x) = f(x)$ . Ainsi  $f$  et  $f \circ g$  coïncident sur  $\ker g$  et sur  $\text{Im } g$  donc sur  $E$ . De même pour l'autre égalité.
- *sens réciproque* : on a  $f = f \circ g$  donc  $f \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ g = f$  et  $f$  est un projecteur (idem pour  $g$ ). Si  $x \in \ker f$  alors  $g(x) = (g \circ f)(x) = 0$  donc  $x \in \ker g$  c'est-à-dire  $\ker f \subset \ker g$ . De même pour l'inclusion réciproque.

### Exercice 7.11

1. On a rapidement  $p \circ q = q \circ p = 0$ . De plus  $p + q = \frac{1}{b-a}(u - aId_E - u + bId_E) = Id_E$ . Ainsi  $p \circ p = p \circ (Id_E - q) = p - 0 = p$  (et de même pour  $q$ ). Les endomorphismes  $p$  et  $q$  sont donc des projecteurs (on peut également calculer  $p \circ p$  directement en écrivant, pour le second  $u - aId_E = u - bId_E + (b - a)Id_E$ ).
2. On a  $u^0 = Id_E = p + q$ . De plus  $(b - a)p = u - aId_E$  et  $(a - b)q = u - bId_E$ . Par combinaison linéaire (pour éliminer  $Id_E$ ), on obtient  $(b - a)bp - (a - b)aq = (b - a)u$ , soit  $u = aq + bp$ . Puisque  $p$  et  $q$  commutent avec  $p \circ q = 0$ , la formule du binôme donne alors

$$u^n = a^n q^n + b^n p^n = a^n q + b^n p.$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On regarde si, par le plus grand des hasards, formule n'est pas valable pour  $-n$ . On effectue le produit  $u^n$  par le candidat à l'inverse

$$u^n \cdot (a^{-n} q + b^{-n} p) = (a^n q + b^n p)(a^{-n} q + b^{-n} p) = q^2 + 0 + p^2 = q + p = Id_E.$$

Ainsi l'inverse de  $u^n$  est bien  $a^{-n} q + b^{-n} p$ . La formule est donc valable pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

4. On commence par remarquer que, pour tout  $x \in E$ ,  $p(x) \in \ker(u - bId_E)$  et  $q(x) \in \ker(u - aId_E)$ . De plus  $x = p(x) + q(x)$ . De plus si  $x \in \ker(u - bId_E) \cap \ker(u - aId_E)$ , alors  $u(x) = ax = bx$ . Puisque  $b \neq a$ , alors  $x = 0$ . On a montré  $E = E_a \oplus E_b$ .

### Exercice 7.12

Le théorème du rang nous donne que  $\dim F + \dim G = \dim E$  lorsque  $F$  existe. C'est donc une condition nécessaire. Supposons que  $\dim F + \dim G = \dim E$ . On va construire  $f$  sur une base de  $E$ . Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$ , complétée par  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  pour donner une base de  $E$ . Puisque  $\dim G = n - p$ , on peut considérer  $f_{p+1}, \dots, f_n$  des vecteurs formant une base de  $G$ . Considérons l'application linéaire  $f$  qui envoie  $e_1, \dots, e_p$  sur 0 et  $f(e_i) = f_i$  lorsque  $i = p + 1, \dots, n$ . L'image de  $f$  est engendrée par l'image d'une base de  $E$ , et l'image de la base  $e_1, \dots, e_n$  est  $f_{p+1}, \dots, f_n$ . Ainsi  $\text{Im } f = G$ . Si on note  $H = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ , la restriction de  $f$  de  $H$  vers  $G$  est un automorphisme. Ainsi  $\text{rg } f \geq n - p$ . Puisque  $\dim \ker f \geq p$  avec  $F \subset \ker f$ , on a finalement  $\ker f$  de dimension  $p$ , égal à  $F$ .

### Exercice 7.13

- Tout d'abord  $h = g \circ f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . On a  $h \circ h = g \circ f \circ g \circ f = g \circ (f \circ g) \circ f = h$ , donc  $h$  est un projecteur.
- On détermine  $\ker h$ . Si  $g(f(x)) = 0$ , en composant par  $f$ , on a  $f(x) = 0$  donc  $x \in \ker f$ , ce qui donne  $\ker h \subset \ker f$ . La réciproque est immédiate. On a  $\ker h = \ker f$ .
- Pour l'image, on a directement  $\text{Im } h \subset \text{Im } g$ . Réciproquement, si  $y = g(x)$  avec  $x \in \mathbb{R}^p$ , alors  $y = (g \circ f)(g(x)) \in \text{Im } g \circ f$ . Ainsi  $\text{Im } h = \text{Im } g$ .
- On a  $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}^p}$  si bien que  $g$  est injective. Le théorème du rang donne  $\dim \mathbb{R}^p = \text{rg } g = p$ . On a également  $f$  surjective, d'où  $n = \text{rg } f + \dim \ker f$  donne  $\dim \ker f = n - p$ . Tout est cohérent puisqu'on retrouve  $\text{rg } h + \dim \ker h = p + n - p = n$ .

## Exercice 7.14

1. Puisque  $\text{rg } u = 1$ , il existe  $v \neq 0$ , tel que  $\text{Im } u = \text{Vect}(v)$ . Pour tout  $x \in E$ ,  $u(x)$  est colinéaire à  $v$  et il existe un unique scalaire  $\lambda_x$  tel que  $u(x) = \lambda_x \cdot v$ . On note  $\varphi : x \mapsto \lambda_x$ . Il reste à montrer que l'application  $\varphi$  de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  est linéaire. Soit  $x, y \in E \times E \times \mathbb{K}$ . On a

$$u(x + \lambda y) = \varphi(x + \lambda y)v = u(x) + \lambda u(y) = (\varphi(x) + \lambda \varphi(y))v.$$

Puisque  $v \neq 0$ , on a  $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$ .

2. Pour  $x \in E$ ,  $u^2(x) = u(u(x)) = u(\varphi(x)v) = \varphi(x)u(v) = \varphi(x)\varphi(v)v = \varphi(v)u(x)$ . On montre par récurrence que  $u^n(x) = (\varphi(v))^{n-1}u(x)$  si  $n \geq 1$ , soit  $u^n = (\varphi(v))^{n-1}u$ .

## Exercice 7.15

Considérons  $\varphi$  la restriction de  $f$  à  $\ker(g \circ f)$  :

$$\varphi : \begin{cases} \ker(g \circ f) & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

C'est possible puisque  $\ker(g \circ f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . On étudie image et noyau :

$$x \in \ker \varphi \Leftrightarrow x \in \ker(g \circ f) \text{ et } f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ et } (g \circ f)(x) = 0,$$

puisque la première condition entraîne la seconde, on a  $\ker \varphi = \ker f$ . Soit  $y$  dans l'image de  $\varphi$  : il existe  $x \in \ker(g \circ f)$  tel que  $y = f(x)$ . On a notamment  $g(y) = (g \circ f)(x) = 0$ , d'où  $y \in \ker g$ . Ainsi  $\text{Im } \varphi \subset \ker g$ , et  $\dim \text{Im } \varphi \leq \dim \ker g$ . On écrit le théorème du rang pour  $\varphi$  :

$$\dim \ker(g \circ f) = \dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

## Exercice 7.16

Si  $\text{Im } u = \text{Vect}(x)$  et  $\text{Im } v = \text{Vect}(y)$  alors  $\text{Im } (u + v) \subset \text{Vect}(x, y)$ . Cela donne  $\text{rg } (u + v) \leq 2$ . Toutes les situations peuvent arriver. Le cas  $v = -u$  donne un rang nul, le cas  $u = v$  un rang égal à 1 et le rang 2 peut s'obtenir avec des projecteurs bien choisis (par exemple).

## Exercice 7.17

1. On a rapidement  $\text{Im } (u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$ , d'où  $\text{rg } (u + v) \leq \dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$ . En appliquant avec  $u + v$  et  $-v$ , on obtient  $\text{rg } u \leq \text{rg } (u + v) + \text{rg } (-v)$ . Or  $\text{Im } v = \text{Im } (-v)$ , ce qui donne  $\text{rg } (u + v) \geq \text{rg } u - \text{rg } v$ . De même  $\text{rg } (u + v) \geq \text{rg } v - \text{rg } u$ , d'où  $|\text{rg } u - \text{rg } v| \leq \text{rg } (u + v)$ .
2. Si on a  $u \circ v = 0$ , alors  $\text{Im } v \subset \ker u$ , donc  $\text{rg } u \leq \dim \ker v = \dim E - \text{rg } v$ . On a donc  $\text{rg } u + \text{rg } v \leq \dim E$ . De plus  $\dim E = \text{rg } (u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$ . Finalement  $\text{rg } u + \text{rg } v = \dim E$ .

## Exercice 7.18

1. non vide et stable par combinaison linéaire.
2. deux méthodes :
- On montre facilement que la somme est directe. Par analyse synthèse : si  $f \in E$ , alors

$$f = \left( \int_0^1 f(t) dt \right) \cdot 1_{\mathbb{R}} + \left( f - \left( \int_0^1 f(t) dt \right) \cdot 1_{\mathbb{R}} \right)$$

est l'unique décomposition de  $f$  dans  $F \oplus G$ .

→ l'application  $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$  est une forme linéaire non nulle sur  $E$ . On a  $F = \ker f$  et  $f(1_{\mathbb{R}}) = 1 \neq 0$  donc  $1_{\mathbb{R}} \notin F$  et  $\text{Vect}(1_{\mathbb{R}})$  est un supplémentaire de  $F$ .

## Exercice 7.19

On montre facilement que  $F$  est l'ensemble des multiples du polynôme  $X(X-1)(X-2)$  de degré inférieur ou égal à 3, donc l'ensemble  $\{\lambda X(X-1)(X-2), \lambda \in \mathbb{R}\}$ . De même  $G = \{\lambda(X-1)(X-2)(X-3), \lambda \in \mathbb{R}\}$ .  $H$  est l'ensemble des polynômes pairs. La relation  $P(X) = P(-X)$  donne  $P$  sous la forme  $P = a + bX^2$ . Finalement  $F$  et  $G$  sont de dimension 1, et  $H$  de dimension 2.

1. La somme  $F + G$  est directe : si un polynôme est dans l'intersection, il admet 4 racines en étant de degré au plus 3. Ce polynôme est donc nul. On note  $K = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$ . Il est immédiat que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces de  $K$ , ce qui donne  $F \oplus G \subset K$ . Pour l'inclusion réciproque, on peut le faire par dimension :  $K = \{(aX + b)(X-1)(X-2), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((X-1)(X-2), X(X-1)(X-2))$ , ce qui donne  $\dim K = 2$ . Puisque  $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G = 2$ , on obtient l'égalité. On peut aussi considérer un polynôme de  $K$ ,  $P = (aX + b)(X-1)(X-2)$  est le décomposer en

$$P = \lambda X(X-1)(X-2) + \mu(X-1)(X-2)(X-3) = (X-1)(X-2)((\lambda + \mu)X - 3\mu),$$

qui est réalisé pour  $\mu = -b/3$  et  $\lambda = a + b/3$ .

2. On montre que la somme est directe : un élément de l'intersection s'annule en 1, en 2, et, par parité, en  $-1$  et  $-2$ . Il admet 4 racines et est nul. Par des considérations de dimension, on obtient bien  $\dim F \oplus G \oplus H = 4 = \dim E$ , ce qui donne l'égalité des espaces.

## Exercice 7.20

On calcule  $f(X^k)$  (l'application est bien entendu linéaire). On a  $f(1) = f(X) = 0$ ,  $f(X^2) = 2$  et  $f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} + \dots$  si  $k \geq 2$ . On voit déjà que  $\mathbb{R}_1[X] \subset \ker f$  et  $\dim \ker f \geq 2$ . On a également  $\text{Im } f$  qui contient  $f(X^2), \dots, f(X^n)$ , ce qui donne une famille de polynômes de degré allant de 0 à  $n-2$ . On en déduit que  $\mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \text{Im } f$  et  $\text{rg } f \geq n-1$ . Par le théorème du rang, les dimensions ne peuvent pas être supérieures. En conclusion  $\text{Im } f = \mathbb{R}_{n-2}[X]$  et  $\ker f = \mathbb{R}_1[X]$ .

## Exercice 7.21

1. On s'intéresse à l'application linéaire  $g = f|_H \in \mathcal{L}(H, F)$ . On a  $\text{Im } g = f(H)$  et  $\ker g = \{x \in H, f(x) = 0\} = \ker f \cap H$ . On applique la formule du rang à  $g$ , ce qui donne

$$\dim H = \dim f(H) + \dim(\ker f \cap H).$$

On a obtenu la relation.

2. On applique la relation précédente avec  $H = f^{-1}(K)$ . Puisque  $0 \in K$ , on a  $\ker f = f^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(K)$ , si bien que  $\ker f \cap f^{-1}(K) = \ker f$ . On a  $y \in f(H)$  si et seulement s'il existe  $x \in f^{-1}(K)$  tel que  $y = f(x)$ . Or  $x \in f^{-1}(K)$  est équivalent à  $f(x) = y \in K$ . Ainsi  $y \in f(H)$  si et seulement si  $y \in \text{Im } f$  et  $y \in K$ , soit  $y \in K \cap \text{Im } f$ . On obtient la relation en remplaçant.

## Exercice 7.22

Soit  $e_1, \dots, e_p$  une base de  $E$ . Soit  $n_1, \dots, n_p$  des entiers tels que  $f^{n_i}(e_i) = 0$ . On considère  $n$  le plus grand de ces entiers. On a  $f^n(e_i) = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ . L'endomorphisme  $f^n$  est nul sur une base donc partout.

## Exercice 7.23

1. Tout vecteur  $x$  de  $E$  se décompose dans la base donnée. Ainsi  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k f^k(a) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k f^{n-1}(a)\right)$ . L'application  $f$  est donc surjective. Puisque  $f$  est un endomorphisme en dimension finie, elle est bijective. L'image de la base  $(f(a), f^2(a), \dots, f^n(a))$  par  $f^{-1}$  est une base, à savoir  $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$ .
2.  $f^n(a)$  s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs  $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$ . Il existe des scalaires  $a_0, \dots, a_{n-1}$  tels que

$$f^n(a) + a_{n-1}f^{n-1}(a) + \dots + a_1 f(a) + a_0 a = 0.$$

Considérons  $g$  l'endomorphisme  $f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0 \text{Id}$ . Il est nul en  $a$ . De plus  $g$  commute avec  $f$  (il n'y a qu'à écrire), si bien que  $g(f^k(a)) = f^k(g(a)) = 0$  pour tout entier  $k$ . L'endomorphisme  $g$  est nul sur une base de  $E$ . Il est donc nul.

3. Même principe. Soit  $g$  un endomorphisme qui commute avec  $f$ . On peut trouver des constantes  $b_0, \dots, b_{n-1}$  telles que  $g(a) = b_{n-1}f^{n-1}(a) + \dots + b_1 f(a) + a_0 a$ . On considère alors  $h = g - b_{n-1}f^{n-1} - \dots - b_1 f + a_0 \text{Id}$ . Il commute avec  $f$  (car  $f$  et  $g$  commutent avec  $f$ ). Il est nul en  $a$ , et comme dans la question précédente, on montre que  $h(f^k(a)) = f^k(h(a)) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . L'endomorphisme  $h$  est donc nul sur une base de  $E$  et sur  $E$ .

## Exercice 7.24

1. Puisqu'on est en dimension finie, on en profite (le résultat est aussi vrai en dimension infinie mais se fait différemment). On choisit une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Si  $x$  est non nul et que  $(f(x), x)$  est liée alors il existe  $\alpha$  et  $\beta$  pas tous nuls tels que  $\alpha x + \beta f(x) = 0$ . Le scalaire  $\beta$  est non nul sinon on aurait  $\alpha x = 0$  d'où  $x = 0$  ( $\alpha \neq 0$  si  $\beta = 0$ ). Ainsi, il existe  $\lambda$  tel que  $f(x) = \lambda x$ . On applique cela à  $e_i$  : il existe  $\lambda_i$  tel que  $f(e_i) = \lambda_i e_i$ , puis à  $x = e_1 + \dots + e_n$  : il existe  $\lambda$  tel que  $f(x) = \lambda x$ , ce qui donne  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \lambda \sum_{i=1}^n e_i$ . Finalement  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i$ . Puisque  $f$  et  $\lambda \text{Id}$  coïncident sur une base, on a  $f = \lambda \text{Id}$ .
2. Soit  $f$  dans le commutant de  $\mathcal{L}(E)$ . Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$ ,  $D$  la droite vectoriel dirigée par  $x$  et  $H$  un supplémentaire. Soit  $p$  le projecteur sur  $D$  de direction  $H$ . On a  $f(p(x)) = p(f(x))$ , soit  $p(f(x)) = f(x)$ . Or les seuls éléments invariants par  $p$  sont les vecteurs colinéaires à  $x$ , donc  $f(x)$  est colinéaire à  $x$ . Finalement  $f$  est une homothétie.
3. On fait la même chose avec une symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $H$  plutôt qu'un projecteur et on obtient le même résultat.

## Exercice 7.25

1. On commence par remarquer que  $\deg \Delta Q = \deg Q - 1$  pour tout polynôme  $Q$  (on écrit avec des coefficients ou on le fait matriciellement en écrivant la matrice de  $\Delta$  dans la base canonique). Si  $\deg P = n - 1$  alors  $\Delta^n P = 0$ . Il suffit de montrer la propriété pour les entiers  $k < n$ . On détermine alors  $\Delta^k P$  et on montre que c'est une combinaison linéaire des  $P(X+i)$  pour  $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$ . Le plus simple pour cela est de considérer l'application  $T : P \mapsto P(X+1)$ . On a alors  $\Delta = \text{Id} - T$ . Puisque  $\text{Id}$  commute avec  $T$ , on peut appliquer la formule du binôme :

$$\Delta^k = (\text{Id} - T)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i T^i \text{ puis } \Delta^k P = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i P(X+i).$$

2. On a l'inclusion  $F \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Réciproquement, on a  $P, \Delta P, \dots, \Delta^{n-1} P$  tous dans  $F$ . Or  $\Delta^k P$  est de degré  $n-1-k$ . La famille précédente forme donc une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Ainsi  $\text{Vect}(P, \dots, \Delta^{n-1} P) = \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset F$ . Cela donne l'égalité. Puisque que la famille  $(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n-1))$  comporte  $n$  vecteurs et qu'elle est génératrice, elle forme bien une base de l'espace.

3. On a montré que  $\Delta^n = 0$ . De plus

$$\Delta^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i T^i = \text{Id} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i T^i$$

En notant  $\alpha_k = (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ , on a  $\text{Id} = \sum_{k=1}^n \alpha_k T^k$  et, pour tout polynôme  $Q$ ,

$$Q(X) = \sum_{k=1}^n \alpha_k Q(X+k)$$

### Exercice 7.26

- on vérifie que  $f_\sigma^2(e_i) = e_i$  pour tout vecteur  $e_i$  lorsque  $\sigma$  est une transposition. Ainsi  $f^2 = \text{Id}$  dans ce cas et  $f$  est une symétrie. Si  $\tau = \tau_{ij}$  alors  $f_\tau(e_k) = e_k$  si  $k \neq i$  et  $j$ . On a également  $f_\tau(e_i + e_j) = e_i + e_j$  et  $f_\tau(e_i - e_j) = -(e_i - e_j)$ . Les  $n-1$  vecteurs  $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, e_n, e_i + e_j$  sont invariants et le vecteur  $e_i - e_j$  transformé en son opposé. Ces  $n$  vecteurs forment une base et  $f_\tau$  est la symétrie par rapport à  $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, e_n, e_i + e_j)$  de direction  $\text{Vect}(e_i - e_j)$ .
- si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux permutations alors  $(f_\sigma \circ f_{\sigma'})(e_i) = f_\sigma(e_{\sigma'(i)}) = e_{(\sigma \circ \sigma')(i)}$ . Ainsi  $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$ . En utilisant le fait que  $\sigma \mapsto \sigma \sigma'$  est une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ , on vérifie que  $p \circ f_\sigma = p$  (et de même  $f_\sigma \circ p = p$ ). On a alors

$$p \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p = p.$$

Finalement  $p$  est un projecteur.

- avec  $p \circ f_\tau = p$ , on obtient  $p \circ f_\tau(e_1) = p(e_1)$ . À l'aide des différentes transpositions, on montre que tous les vecteurs  $p(e_i)$  sont égaux.
- on vérifie que  $p(e_1) = \frac{1}{n}(e_1 + \dots + e_n)$  (parmi les  $n!$  permutations,  $(n-1)!$  envoient  $e_1$  sur  $e_1$ , autant sur  $e_2 \dots$  on note  $u$  le vecteur  $\frac{1}{n}(e_1 + \dots + e_n)$ .)
- Si  $p(v) = v$  avec  $f_\sigma \circ p(v) = p(v)$  soit  $f_\sigma(v) = v$ , on montre que toutes les coordonnées de  $v$  sont égales. On en déduit que  $v = \lambda(e_1 + \dots + e_n)$ . Réciproquement avec les résultats précédents, on vérifie que  $p(u) = u$ .
- on déduit de tout cela que  $\text{Im } p = \text{Vect } u$ .
- Les vecteurs  $e_i - e_1$  sont dans le noyau de  $p$ . Par dimension,  $\ker p = \text{Vect}(e_2 - e_1, \dots, e_n - e_1)$ .

Matriciellement c'est presque plus simple : on peut montrer que la matrice de  $p$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est la matrice dont tous les coefficients sont  $\frac{1}{n}$  (ce qui permet, avec le chapitre sur la réduction, de retrouver les résultats précédents).

### Exercice 7.27

- Si  $f = g \circ p$ , alors  $\ker p \subset \ker f$ , de plus  $\text{rg}(g \circ p) = \text{rg } p$ . On en déduit que  $\ker f = \ker p$ . Considérons  $p$  un projecteur de noyau  $\ker f$ , d'image  $H$  un supplémentaire de  $\ker f$ . Soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $H$ , complétée par  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\ker p$ . Quelle que soit  $g$ , on a déjà  $f^i(e_i) = (g \circ p)(e_i)$  lorsque  $i = r+1, \dots, e_n$ . On veut alors  $f(e_i) = g(p(e_i)) = g(e_i)$  si  $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ . La famille  $f_1 = f(e_1), \dots, f_r = f(e_r)$  est une base de  $\text{Im } f$  (isomorphisme classique), qu'on peut compléter en  $f_{r+1}, \dots, f_n$  pour obtenir une base de  $E$ . Notons  $g$  l'endomorphisme de  $E$  qui envoie  $e_i$  sur  $f_i$ . Il envoie une base de  $E$  sur une autre base de  $E$  et est par conséquent un automorphisme de  $E$ . Il vérifie alors les bonnes conditions puisque  $f$  et  $g \circ p$  coïncident sur une base.
- On a cette fois  $\text{Im } f = \text{Im } p$  (une inclusion et égalité des rangs). De plus  $f(x) = 0$  si, et seulement si  $g(x) \in \ker p$ . On doit donc envoyer  $\ker f$  sur  $\ker p$  par  $g$  - la difficulté est de construire  $g$  bijective. On décompose l'espace de deux manières : au départ  $E = K \oplus \ker f$ , et à l'arrivée  $E = \text{Im } f \oplus K$ . On note  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $K$  et  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\ker f$ . On a  $(f_1 = f(e_1), f_2 = f(e_2), \dots, f_r = f(e_r))$  qui est une base de  $\text{Im } f$ , qu'on complète à l'aide d'une base de  $K$ ,  $(f_{r+1}, \dots, f_n)$ . On considère  $g$  l'automorphisme qui envoie la première base sur la seconde, et  $p$  le projecteur d'image  $\text{Im } p$ , de noyau  $K$ . Alors, si  $i = 1, \dots, r$ , on a  $p(g(e_i)) = p(f_i) = f_i = f(e_i)$ . Si  $i = r+1, \dots, n$ , alors  $p(g(e_i)) = p(f_i) = 0$  car  $f_i \in K = \ker p$ . Pour ces entiers  $f(e_i) = 0$ . Les applications  $p \circ g$  et  $f$  coïncident sur une base de  $E$  donc sur  $E$ .

### Exercice 7.28

- Soit  $H$  un supplémentaire de  $\ker g$  dans  $E$  et  $\tilde{g}$  l'isomorphisme canonique de  $H$  sur  $\text{Im } g$  :

$$\tilde{g} : \begin{cases} H & \rightarrow & \text{Im } g \\ x & \mapsto & g(x) \end{cases}$$

On cherche  $h$  tel que  $f = g \circ h$ . On ne peut pas directement utiliser  $h = g^{-1} \circ f$  puisque  $g$  n'est pas bijective, mais on peut utiliser  $\tilde{g}$  qui est une bijection entre  $H$  et  $\text{Im } g$ . Puisque, pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) \in \text{Im } f \subset \text{Im } g$ , on peut définir  $h(x) = \tilde{g}^{-1}(f(x))$ . Pour tout  $x \in E$ , on a  $h(x) \in H$  et  $g(h(x)) = \tilde{g}(\tilde{g}^{-1}(f(x))) = f(x)$ . Cela donne bien  $f = g \circ h$ . De plus  $\text{Im } h = \tilde{g}^{-1}(f(E)) = \tilde{g}^{-1}(\text{Im } f)$  et puisque  $\tilde{g}$  est un isomorphisme linéaire, on a  $\text{rg } h = \dim \text{Im } f = \text{rg } f$ .

- on suppose (i) et (ii). On a  $\text{rg } f = \text{rg}(f \circ g \circ f) \leq \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g$  et de même  $\text{rg } g \leq \text{rg } f$ . On a bien  $\text{rg } f = \text{rg } g$ .
- on suppose (i) et (iii). On a  $g \circ f \circ g \circ f = g \circ f$  et  $f \circ g \circ f \circ g = f \circ f$ , donc  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont des projecteurs. On a  $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg } g = \text{rg } f$ . De plus  $\text{rg } g = \text{rg } f = \text{rg } f \circ g \circ f \leq \text{rg } g \circ f$  (de même pour  $\text{rg } f \circ g$ ). On a ainsi  $\text{rg } g \circ f = \text{rg } f \circ g = \text{rg } f = \text{rg } g$ . Puisque  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ , on a  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$ . Finalement  $g \circ f$  est un projecteur d'image  $\text{Im } g$ . Les éléments de  $\text{Im } g$  sont invariants donc, pour tout  $x \in E$ ,  $(g \circ f)(g(x)) = g(x)$ , c'est-à-dire  $g \circ f \circ g = g$ .
- même principe avec (ii) et (iii).

3. On se donne  $f$  et on cherche  $g$ . Si  $g$  existe, on a montré que  $f \circ g$  doit être un projecteur d'image  $\text{Im } f$ . On considère  $p$  un projecteur quelconque d'image  $\text{Im } f$ . On a  $\text{Im } p \subset \text{Im } f$  (puisque'il y a égalité), donc il existe, d'après la première question, une application  $g$  (elle correspond à  $h$  dans la première question) de même rang que  $p$  telle que  $p = f \circ g$ . Puisque  $p$  est un projecteur d'image  $\text{Im } f$ , pour tout  $x \in E$ ,  $p(f(x)) = f(x)$ . Ainsi, pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = p(f(x))(f \circ g)(f(x))$ , ce qui donne  $f \circ g \circ f = f$ , sachant qu'on a  $\text{rg } g = \text{rg } p = \text{rg } f$ .

**Exercice 7.29**

1. Supposons que l'union des sous-espaces donne  $E$ . En retirant certains sous-espaces, on choisit une famille miniale dont l'union donne  $E$  (c'est-à-dire la plus petite famille en terme de nombre d'éléments telle que la réunion donne l'espace). On note  $E_1, \dots, E_k$  cette famille minimale. Quitte à supprimer les sous-espaces qui sont inclus dans l'un des autres, on peut supposer qu'il n'y a aucune inclusion entre les sous-espaces. Soit  $F$  l'union des  $k-1$  premiers sous-espaces  $E_1, \dots, E_{k-1}$  (cette union est différente de  $E$ ). On choisit  $y \in F \setminus E_k$  et  $x \in E_k \setminus F$  (c'est possible par la construction précédente). On considère les vecteurs  $u_\lambda = y + \lambda x$ . Aucun de ces vecteurs n'est dans  $E_k$  car sinon  $y$  le serait aussi (car  $x \in E_k$ ) - ils sont donc tous dans  $F$  (puisque  $E$  est la réunion de ces deux ensembles). Pour  $\lambda \neq \mu$ , les vecteurs  $u_\lambda$  et  $u_\mu$  ne peuvent pas être dans le même sous-espace  $E_i$  pour  $i \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$  : si c'était le cas, on aurait

$$(y + \lambda x) - (y + \mu x) = (\lambda - \mu)x \in E_i$$

ce qui donne  $x \in E_i$  puisque  $\lambda \neq \mu$ . Puisque  $\mathbb{R}$  comporte plus que  $k$  réels, on obtient une contradiction.

2. On fait une récurrence sur la codimension commune des sous-espaces (l'entier  $p = n - r$ ). C'est immédiat lorsque  $p = 0$ . Supposons la propriété vraie pour un certain entier  $p$  et considérons  $k$  sous-espaces de dimension  $n - (p + 1)$ . La réunion de ces sous-espaces n'est pas tout l'espace  $E$ . Il existe donc un vecteur  $x$  qui n'est dans aucun de ces sous-espaces. Notons alors  $G_i = F_i \oplus \text{Vect}(x)$ . Ces  $k$  sous-espaces sont de même dimension  $n - p$  et on peut appliquer la propriété de récurrence au rang précédent. Il existe ainsi un supplémentaire commun  $H$  pour ces différents sous-espaces :  $G_i \oplus H = E$ . On note alors  $K = \text{Vect}(x) \oplus H$ . Ce sous-espace vectoriel est un supplémentaire commun à tous les espaces  $F_i$ .

**Exercice 7.30**

1. Voir l'un des exercices précédents.
- 2.v.1 : Soit  $H = F \cap G$ . On note  $H_1$  un supplémentaire de  $H$  dans  $F$  et  $H_2$  un supplémentaire de  $H$  dans  $G$ . Les espaces  $H_1$  et  $H_2$  ont même dimension puisque  $F$  et  $G$  sont de même dimension. On note  $e_1, \dots, e_p$  une base du premier et  $f_1, \dots, f_p$  une base du second. On note  $K = \text{Vect}(e_1 + f_1, \dots, e_p + f_p)$ . On vérifie qu'il est en somme directe avec  $F$  et avec  $G$  et que c'est un supplémentaire commun à  $F$  et  $G$  dans  $F + G$ . On note  $L$  un supplémentaire de  $F + G$  dans  $E$ . Alors,  $K \oplus L$  convient.
- v.2 : on considère l'ensemble des espaces qui sont en somme directe avec  $F$  et avec  $G$ . Cet ensemble est non vide. On en choisit un,  $H$ , de dimension maximale. Soit  $F' = F \oplus H$  et  $G' = G \oplus H$ . Si ces espaces ne sont pas  $E$ , alors il existe un vecteur  $x$  en dehors de  $F' \cup G'$ . L'espace  $H \oplus \text{Vect}(x)$  est en somme directe avec  $F$  et  $G$ . Cela contredit la maximalité. Ainsi  $E = F \oplus H = G \oplus H$ .
3. Supposons que  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ , la famille étant libre. On note  $F_i = \text{Vect}(e_i)$ . On a directement  $d(F) = \sum_{i=1}^k d(F_i)$ . Si  $G_1$  et  $G_2$  sont deux droites non colinéaires, alors elles admettent un supplémentaire commun  $H$ . On a  $d(E) = d(G_1) + d(H) = d(G_2) + d(H)$ . Ainsi  $d(G_1) = d(G_2)$ . Notons  $\alpha$  cette quantité commune à toutes les droites. On a alors  $d(F) = k \cdot \alpha = \alpha \dim(F)$ . Réciproquement une telle applications convient.