CHAPITRE 6 - STRUCTURES

Exercice 6.3

1. On vérifie par calcul $\det(A(\theta)) = \det(B(\theta)) = 1$ ainsi G et H sont inclus dans $GL_2\mathbb{R})$. La matrice I_2 est $A(0) = B(0)$. Par calcul, on vérfie que $A(\theta)A(\theta') = A(\theta+\theta') \in G$ et $A(\theta)^{-1} = A(-\theta) \in G$ (et de même pour $B(\theta)^{-1})$). On en déduit que G et H sont deux sous-groupes de $GL_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in G$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = A(\theta)$. On a alors $A^2 = A(2\theta)$ et $A^2 = I_2$ si et seulement si $\cos(2\theta) = 1$ et $\sin(2\theta) = 0$ soit $\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Il y a donc deux matrices de G qui vérifient $X^2 = I_2$: la matrice $A(0) = I_2$ et $A(\pi) = -I_2$. En revanche dans H, on ne trouve que I_2. S'il existait un isomorphisme φ entre G et H. On a, pour $X \in G$, $\varphi(X^2) = \varphi(X)^2$. Si $X^2 = I_2$ alors $\varphi(X)^2 = \varphi(I_2) = I_2$. Or I_2 et $-I_2$ sont deux matrices de G qui vérifient cela. Si φ est bijective, $\varphi(I_2)$ et $\varphi(-I_2)$ seraient deux matrices distinctes qui vérifient $(\varphi(X))^2 = I_2$ dans H d'où une contradiction.

Exercice 6.4

1. On vérifie tout d'abord qu'on a bien défini une relation d'équivalence : on a évidemment $x\mathcal{R}x$ et si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$. De même la transitivité est immédiate. Deux éléments d'une même classe d'équivalence ont même image. Cela permet de définir une application $\tilde{f}$. On pourrait montrer que c'est même un morphisme de groupes (en commençant à montrer que $G/\mathcal{R}$ a une structure de groupe mais on déborde pas mal). L'application est surjective : si $z \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in G$ tel que $z = f(x)$ et alors $\tilde{f}(\bar{x}) = z$. Elle est injective car si $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ alors $f(x) = f(y)$ et x et y sont dans la même classe d'équivalence. L'application est bijective. On vérifie enfin que chaque classe d'équivalence comporte exactement $|\ker f|$ éléments. Si $f(y) = f(x)$ alors $f(y * x^{-1}) = e_H$ et $y * x^{-1} \in \ker f$ d'ou il existe $g \in \ker f$ tel que $y = x * g$. Réciproquement si $y = x * g$ alors $f(x) = f(y)$. Les éléments $x * g$ lorsque g décrit $\ker f$ sont deux à deux distincts. Ainsi $\bar{x}$ comporte autant d'élément que $\ker f$.
2. On a une partition de G par les classes d'équivalences. Il y en a $|\operatorname{Im} f$ et chacune comporte $|\ker f|$ éléments ce qui donne la formule.
3. Si $f(x) = e$ alors $f^2(x) = f(e) = e$ donc $\ker f \subset \ker f^2$. De même si $y \in \operatorname{Im} f^2$ alors $y \in \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. On alors les équivalences $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si les deux sont de même cardinal et de même pour les images. En utilisant alors $|G| = |Imf|.|\ker f| = |Imf^2|.|\ker f^2|$ (puisque f^2 est aussi un automorphisme de G), on a

$$\ker f = \ker f^2 \Leftrightarrow |\ker f| = |\ker f^2| \Leftrightarrow |\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} f^2| \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2.$$

Exercice 6.5

1. Soit $g = x+\sqrt{2}y \in G$. On a $x^2-2y^2 = 1 = (x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y)$ et $x^2 > 2y^2$. Ainsi $x > \sqrt{2}|y| \geqslant -\sqrt{2}y$. On en déduit que $x+\sqrt{2}y > 0$ (et aussi $x-\sqrt{2}y$).
2. on vérifie différente propriété :
   - $\rightarrow$ G est non vide car $1 = 1+\sqrt{2}.0 \in G$.
   - $\rightarrow$ le produit est interne : on prend $g = x+\sqrt{2}y$ et $g' = x'+\sqrt{2}y'$ dans G et on veut montrer que $h = gg'$ l'est encore. Pour commencer $h = (xx'+2yy')+(xy'+yx')\sqrt{2}$. On doit montrer que $xx'+2yy'$ est dans $\mathbb{N}^*$. Il est évidemment dans $\mathbb{Z}$. Comme au début, on a $x > \sqrt{2}|y| \geqslant 0$ et $x' > \sqrt{2}|y'| \geqslant 0$ donc $xx' > 2|yy'| \geqslant -2yy'$. Finalement $xx'+2yy' > 0$. L'élément est bien sous la forme $a+\sqrt{2}b$ avec $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{Z}$. Il reste à prouver que $h = a+\sqrt{2}b$ vérifie $a^2-2b^2 = 1$. On peut le faire par calcul compliqué ou simplement remarquer que $x^2-2y^2 = (x-\sqrt{2}y)(x+\sqrt{2}y)$. Si $g = x+\sqrt{2}y$, on note $\bar{g} = x-\sqrt{2}y$ et on remarque que $g\bar{g} = x^2-2y^2 = 1$ soit $\bar{g} = 1/g$. On a alors $(gg')\overline{gg'} = gg'\bar{g}\bar{g}'$ (on vérifie que $\overline{gg'} = \overline{g}\overline{g'}$) et en commutant et associant on trouve 1. Ainsi gg' est dans G.
   - $\rightarrow$ On a au passage montré que le symétrique de g est $\overline{g} = \dfrac{1}{g}$ et qu'il est aussi dans G.

   Finalement G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
3. On a $(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y) = 1$. Puisque $x+\sqrt{2}y \geqslant 1+\sqrt{2} > 1$, on a $x-\sqrt{2}y \in]0,1[$.
4. Les éléments de $G \cap]1,+\infty[$ sont ceux qui s'écrivent $x+\sqrt{2}y$ avec $x, y \in \mathbb{N}^*$ et $x^2-2y^2 = 1$. On détermine les premiers éléments qu'on trouve :
   - $\rightarrow$ $x = 1$, le seul élément dans G est $1+0\sqrt{2} = 1$,
   - $\rightarrow$ $x = 2$, pas de solution puisqu'on doit avoir $2y^2 = 3$. Plus généralement, si x est pair x^2-2y^2 l'est aussi donc ne peut être 1.
   - $\rightarrow$ $x = 3$, on a $y^2 = 4$ et $3 \pm 2\sqrt{2}$ sont dans G avec $3+2\sqrt{2} > 1$,
   - $\rightarrow$ si $x \geqslant 5$ et $y \geqslant 1$ alors $x+\sqrt{2}y \geqslant 5+\sqrt{2} > 3+2\sqrt{2}$.

   Le plus petit élément strictement supérieur à 1 dans G est $g_0 = 3+2\sqrt{2}$.
5. Considérons $H =< g_0 >= \{g_0^n, n \in \mathbb{Z}\}$. C'est un sous-groupe monogène de G. Soit $g > 1$ dans G. Puisque $g_0 > 1$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g_0^n \leqslant g < g_0^{n+1}$. On a alors $g_0^{-n}g \in G$ et $1 \leqslant g_0^{-n}g < g_0$. Par définition de g_0, on a $g_0^{-n}g = 1$ et $g = g_0^n$. En conclusion $G = H =< g_0 >= \{g_0^n, n \in \mathbb{Z}\}$. On a en fait déterminer toutes les solutions entières de l'équation $x^2-2y^2 = 1$ (avec $x \in \mathbb{N}$, mais on peut prendre les mêmes en changeant le signe de x) : elles sont toutes obtenues à partir des puissances g_0^n pour $n \in \mathbb{N}$ (celles avec $n \in \mathbb{Z}$ donnent les couples (x, y) avec $y < 0$).