5 Intégrales généralisées

I. Intégration sur un intervalle

Généralités sur un intervalle $[a,b[$

Définition 1 *(Convergence de l'intégrale)*

On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge lorsque $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie en b (à gauche si $b \in \mathbb{R}$). On note alors $\int_a^b f(t)\,dt$ cette limite. Sinon on dit que l'intégale est divergente.

Propriété 1

On suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent (avec $b > a$)

- → linéarité : $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\int_a^b (f+\lambda g)(t)\,dt$ converge avec $\int_a^b (f+\lambda g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \lambda \int_a^b g(t)\,dt$,
- → positivité : si $f \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$,
- → caractère défini : si $f \geqslant 0$, f **continue** et $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors f est nulle sur $[a,b[$.
- → indépendance du point base : si $c \in]a,b[$ alors $\int_c^b f(t)\,dt$ converge et $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

Remarque : attention, si $\int_a^b (f+g)$ converge, on n'a pas forcément la convergence des deux intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$.

Cas des fonctions positives

Propriété 2 *(propriété principale)*

Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$ et **positive** alors $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,b[$. On a alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge} \iff F \text{ admet une limite finie en } b \iff F \text{ est majorée sur } [a,b[.$$

Remarque : puisque F est **croissante**, on peut ramener l'étude de la convergence de $\int_a^b f(t)\,dt$ à l'étude de la limite d'une suite $\int_a^{b_n} f(t)\,dt$ où b_n tend vers b. Par exemple, pour étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ lorsque $f \geqslant 0$, on peut s'intéresser à la suite $\int_0^n f(t)\,dt$ ou $\int_0^{n\pi} f(t)\,dt \ldots$

Propriété 3 *(Critères de comparaison)*

Si f et g sont continues par morceaux et **positives** sur $[a,b[$, alors

- → si $0 \leqslant f \leqslant g$: $\int_a^b g(t)\,dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ converge,
- → si $f = \underset{b}{o}(g)$ ou $f = \underset{b}{O}(g)$: $\int_a^b g(t)\,dt$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ converge,
- → si $f \underset{b}{\sim} g$: $\int_a^b g(t)\,dt$ converge $\iff \int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Fonctions quelconques

Définition 2 *(Intégrabilité)*

On dit que f, continue par morceaux sur $[a,b[$, est intégrable sur $[a,b[$ lorsque $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge (on dit aussi que $\int_a^b f(t)\,dt$ est **absolument convergente**).

Théorème 1 *(Intégrabilité et convergence)*

Si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. On n'a surtout PAS DE RÉCIPROQUE

INTÉGRALE DÉFINIE, INTÉGRALE CONVERGENTE

Propriété 4 *(Lien avec les intégrales définies)*

Si f est continue par morceaux sur le **segment** $[a,b]$ alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ convergent lorsque qu'on se restreint à $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$ et ont toutes la même valeur $\int_a^b f(t)\,dt$ (en tant qu'intégrale définie).

Remarque : cela sert pour les intégrales *faussement impropres* : la fonction f est continue sur $[a,b[$ (avec b **fini**) et admet une limite finie en b. On peut la prolonger par continuité sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

II. FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Propriété 5 *(Au programme)*

- → $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$,
- → $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$,
- → $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$,
- → $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si $\alpha < 1$,
- → $t \mapsto \frac{1}{(a-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[c,a[$ si et seulement si $\alpha < 1$

Remarque : en combinant avec les critères de comparaison (règles de Riemann)

- → soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$:
  - s'il existe $\alpha > 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ est bornée ou de limite finie en $+\infty$ alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$,
  - si $xf(x)$ est minorée par $m > 0$ ou de limite infinie en $+\infty$ alors f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$,
- → soit f continue par morceaux sur $]0,a]$:
  - s'il existe $\alpha < 1$ tel que $x^\alpha f(x)$ est bornée ou de limite finie en 0 alors f est intégrable sur $]0,a]$,
  - si $xf(x)$ est minorée par $m > 0$ ou de limite infinie en 0 alors f n'est pas intégrable sur $]0,a]$,

Propriété 6 *(Hors programme - Intégrales de Bertrand)*

- → la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
- → la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est intégrable sur $]0,1/2]$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 1

Étudier la convergence des intégrales suivantes (ces intégrales existent-elles au sens des fonctions intégrables ?) :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\,dx.$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x}\,dx.$

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+x)}{(1+x)^2}\,dx.$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^4}\,dx.$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(2+\sin x)\ln^3 x}{1+x^2}\,dx.$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\ln^2(x)}\,dx.$

Exercice 2

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,dt$ converge.

Exercice 3

Étudier la convergence des intégrales suivantes (ces intégrales existent-elles au sens des fonctions intégrables ?) :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx.$

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx.$

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2-x)}{(1+x)^2}\,dx.$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(x)}{1+x^4}\,dx.$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln(1-x)}}.$

III. CALCULS

Propriété 7 *(Changement de variable)*

si
- → f est continue par morceaux sur I et intégrable sur I,
- → φ est $\mathscr{C}^1$ et bijective de J sur I,

alors
- → $f \circ \varphi \times \varphi'$ est intégrable sur J,
- → $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)).\varphi'(u)\,du$ où $\alpha = \lim\limits_{x\to a} \varphi^{-1}(x)$, $\beta = \lim\limits_{x\to b} \varphi^{-1}(x)$.

Remarque : si φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de J sur I, alors f est intégrable sur I si et seulement si $f\circ\varphi\times\varphi'$ est intégrable sur J. Cela permet de faire les calculs sans justifier les premières intégrabilités (si l'une des intégrales cv absolument).

Propriété 8 *(Intégration par parties)*

Soit f, g continues par morceaux sur $]a, b[$. Si fg admet une limite finie en a et b, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature et, en cas de convergence,

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Remarque : trop d'hypothèses... autant se ramener à un segment et passer les bornes aux limites.

Exercice 4

Prouver l'existence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2t+3}$.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}$.

Exercice 5

Prouver l'existence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$

b) $\displaystyle\int_0^1 |\ln x|^n\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

c) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{2+\cos t}$.

Exercice 6

Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1+a\sin^2 x}$ à l'aide du changement de variable « $t = \tan x$ ».

Exercice 7

On considère, pour a et b réels, l'intégrale $I(a,b) = \displaystyle\int_0^1 x^a \left(\ln\frac{1}{x}\right)^b dx$.

1. Montrer que cette intégrale existe si et seulement si $a > -1$ et $b > -1$. On supposera ces conditions réalisées par la suite.
2. Montrer que $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x} x^b\,dx = \frac{1}{(a+1)^{b+1}} I(0,b)$.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I(0,n) = nI(0,n-1)$ et en déduire la valeur de $I(a,n)$ pour $a > -1$ et $n \in \mathbb{N}$.

IV. BILAN - ÉTUDIER UNE INTÉGRABILITÉ

L'essentiel *(Étudier une intégrabilité)*

→ sur quel intervalle travaille-t-on ? de quel(s) coté(s) est-il ouvert ?
→ la fonction est-elle positive ? la passer en module sinon.
→ cas simples : limite non nulle en $+\infty$ (intégrale grossièrement divergente), fonction qui se prolonge par continuité sur un segment (intégrale faussement impropre)
→ chercher un équivalent plus simple et utiliser les règles comparaisons, majorer
→ si on ne voit pas de comparaison simplement, essayer les règles de Riemann
→ utiliser un changement de variable pour étudier une autre intégrabilité
→ revenir à l'absolue convergence en étudiant l'éventuelle limite de $\int_a^x |f(t)|\,dt$ (si on est sur $[a,b[$) - ce qui permet également un IPP.

V. INTÉGRATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

Propriété 9 *(En $+\infty$)*

Soient f, g continues par morceaux sur $I = [a, +\infty[$ avec g **positive**.

→ si g est intégrable sur I (comparaison des restes) :
- si $f = \underset{+\infty}{o}(g)$ (resp. $f = \underset{+\infty}{O}(g)$), alors $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} g(t)\,dt\right)$ (resp. O..)
- si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\int_x^{+\infty} g(t)\,dt\right)$.

→ si g n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$ (comparaison des intégrales partielles) :
- si $f = \underset{+\infty}{o}(g)$ (resp. $f = \underset{+\infty}{O}(g)$), alors $\int_a^x f(t)\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$ (resp. O..)
- si $f \underset{+\infty}{\sim} g$, alors $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\int_a^x g(t)\,dt\right)$.

Remarque : même type de résultat en 0 - on compare les restes $\int_0^x$ lorsque g est intégrable et les intégrales partielles $\int_x^1$ lorsqu'elle ne l'est pas.

VI. INTÉGRALES SEMI-CONVERGENTES

Proposition 10 *(Exemple de référence)*

→ $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge,
→ la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}\,dt$ n'est pas intégrable sur $[\pi, +\infty[$.

Remarque : plus généralement (mais hors programme)

→ si $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin kt}{t^\alpha}\,dt$, $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos kt}{t^\alpha}\,dt$, $\int_\pi^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t^\alpha}\,dt$ convergent
→ si $\alpha > 1$, les fonctions $t \mapsto \frac{\sin kt}{t^\alpha}$, $t \mapsto \frac{\cos kt}{t^\alpha}$, $t \mapsto \frac{e^{ikt}}{t^\alpha}$ sont intégrales sur $[\pi, +\infty[$,
→ la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

VII. BILAN - ÉTUDIER UNE CONVERGENCE

L'essentiel *(Étudier une convergence)*

→ sur quel intervalle travaille-t-on ? de quel(s) coté(s) est-il ouvert ?
→ cas simples : limite non nulle en $+\infty$, fonction qui se prolonge par continuité sur un segment (intégrale faussement impropre)
→ la fonction est positive :
- chercher un équivalent plus simple et utiliser les règles comparaisons, majorer
- si on ne voit pas de comparaison simplement, essayer les règles de Riemann

→ la fonction est quelconque :
- passer module/valeur absolue et étudier la convergence absolue (ou l'intégrabilité)
- revenir à $\int_a^x f(t)\,dt$ (si on est sur $[a,b[$) - ce qui permet de transformer l'intégrale par IPP, changement de variable.
- effectuer un développement asymptotique du terme général.

VIII. LIEN INTÉGRALE - LIMITE

Propriété 11

Soit f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.

→ $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge $\iff F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$

→ f intégrable sur $[a,+\infty[\not\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,

→ f intégrable sur $[a,+\infty[$ et admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle

→ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \not\Rightarrow f$ intégrable sur $[a,+\infty[$.

→ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow f$ n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.

→ f admet une limite finie en $+\infty \iff \displaystyle\int_a^{+\infty} f'(t)\,dt$ converge (ce qui est vrai lorsque f' est intégrable).

Remarque : il existe des fonctions sans limite en $+\infty$ qui sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

IX. EXERCICES

Exercice 8 *(Mines MP 2015)*

Déterminer les $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta}\,dx$ soit convergente.

Exercice 9

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|\ln x|^\beta}{(1-x)^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Exercice 10

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt$.

Exercice 11

1. Pour $r,s\in\mathbb{R}$, l'intégale $I(r,s) = \displaystyle\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,dx$ est-elle définie ?
2. Calculer $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Exercice 12 *(Mines MP)*

1. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2})\,dx$.

Exercice 13

Soit f,g,h trois fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, à valeurs réelles. On suppose $f\leqslant g\leqslant h$, f et h intégrables sur I. Montrer que g est intégrable sur I.

Exercice 14 *(très classique)*

Soit f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{x/2}^x f(t)\,dt$.
3. En déduire que lorsque x tend vers $+\infty$ on a $f(x) = o(\frac{1}{x})$.

Exercice 15

Soit f une fonction de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. On veut montrer que si f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ alors f'^2 est intégrable également :

1. Montrer que ff'' est intégrable.

2. On suppose que f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que ff' tend vers $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer alors que f^2 tend vers l'infini.
   (c) Conclure.
3. On suppose de plus que $f(0) = 0$. Montrer

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+} f'^2\right)^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^+} f^2 \int_{\mathbb{R}^+} f''^2.$$

Exercice 16 *(Mines 2013)*

1. Montrer que $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Soit f continue, 2π-périodique et impaire. Montrer qu'elle admet une primitive 2π-périodique et paire si et seulement si $\displaystyle\int_0^{2\pi} f = 0$.
3. Soit f une telle fonction, montrer que $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 17

1. Justifier que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est convergente.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ est divergente.
3. Justifier que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}\,dt$ est divergente (on utilisera un développement asymptotique). Quel contre-exemple donne cet exemple ?
4. Déterminer, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\,dt$. Déterminer, lorsque $\alpha \in]0,1[$, un équivalent de $\displaystyle\int_{1}^{x} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\,dt$.

Exercice 18 *(Mines MP 2016)*

Nature, suivant $\alpha > 0$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)dt$.

Exercice 19 *(Mines MP)*

1. Soit $t \in \mathscr{C}^0(]0,1],\mathbb{R})$ monotone et intégrable. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général $(n!/n^n)^{1/n}$.
3. Exprimer la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^{1/n}$. Déterminer cette limite d'une autre manière (✰).

Exercice 20 *(Mines-Ponts MP)* ✰

1. Étudier l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de $f : t \mapsto \sqrt{t-\cos t}-\sqrt{t}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est-elle convergente ?
2. Donner un équivalent de $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \left|f(t)\right|\,dt$.

Exercice 21 *(Centrale MP 2011)* ✰

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $I(a) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left|e^{it}-a\right|$.

1. Montrer l'existence de $I(0)$ et donner sa valeur.
2. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\sin t\,dt$ et en déduire l'existence de $I(1)$.
3. Montrer que $I(a)$ existe pour tout $a \in \mathbb{C}$ et que $I(a) = I(|a|)$.
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $M(P) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|P(e^{it})|$.
   (a) Montrer que $M(P)$ existe pour tout polynôme non nul.
   (b) Montrer que, pour $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $M(X^n - b^n) = nM(X-b)$.
   (c) Déterminer la valeur de $M(X-b)$ pour $b \in]0,1[$, puis $b > 1$.
   (d) Calculer $M(X-1)$.
   (e) Calculer $M(P)$.