CHAPITRE 5 - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Exercice 5.2

Dans le cas où f est intégrable sur $[1,+\infty[$, la majoration $\left|\dfrac{f(t)}{t^\alpha}\right| \leqslant |f(t)|$ si $t \geqslant 1$ permet de conclure. Sinon on revient à la définition de la convergence. Appelons F la primitive de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1 : $\forall x \in [1,+\infty[$, on a $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$. La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ signifie, par définition, que F admet une limite finie en $+\infty$. Pour tout $x \geqslant 1$, par intégration par parties sur $[1,x]$ (les fonctions sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce segment),

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t^\alpha}\,dt = \frac{F(x)}{x^\alpha} - \frac{F(1)}{1} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$$

De plus F est continue sur $[1,+\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$ donc F est bornée sur $[1,+\infty[$. Notons M un majorant de $|F|$ sur $[1,+\infty[$. Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha} = 0$, et pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $\left|\dfrac{F(t)}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \dfrac{M}{t^{\alpha+1}}$. Donc $t \mapsto \dfrac{F(t)}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$ est donc convergente et finalement, $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^\alpha}\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui signifie bien que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,dt$ converge. On obtient, de plus, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{\alpha+1}}$.

Exercice 5.4

a) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$
b) $\frac{\pi}{4}$
c) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.
d) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Exercice 5.5

a) -4
b) $n!$
c) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Exercice 5.6

Le changement de variable proposé ne convient pas sur $[0,\pi]$, il faut changer l'intervalle d'intégration. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+a\sin^2 x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est également paire et de période π. Ainsi $I = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$. On peut exprimer $\sin^2 x$ assez facilement à l'aide de $\tan^2 x$ puisque $\sin^2 x = \cos^2 x \tan^2 x$ soit $\sin^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ si $x \in [0,\pi/2[$. La fonction $\varphi : t \mapsto \arctan t$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,+\infty[$ sur $[0,\pi/2[$ et f est intégrable sur $[0,\pi/2]$ donc sur $[0,\pi/2[$ ce qui permet d'effectuer le changement de variable dans l'intégrale

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a\dfrac{t^2}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(a+1)t^2}\,dt \\ &= \frac{2}{a+1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\dfrac{1}{a+1}}\,dt. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $t \mapsto \frac{1}{\alpha}\arctan\frac{t}{\alpha}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+\alpha^2}$ si $\alpha \neq 0$ et que par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+\alpha^2}\,dt = \frac{\pi}{2\alpha}$ si $\alpha > 0$, on obtient

$$I = \frac{2}{a+1}\,\frac{\pi\sqrt{a+1}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a+1}}.$$

Exercice 5.7

1. La fonction $f : x \mapsto x^a(-\ln x)^b$ est continue sur $]0,1[$. Le plus simple est le comportement au voisinage de 1, puisque $f(x) \underset{x\to1}{\sim} 1.(1-x)^b$, et $x \mapsto (1-x)^b$ est intégrable sur $[1/2,1[$ si et seulement si $b > -1$. L'étude en 0 est plus difficile, on peut se reporter à l'étude sur les intégrales de Bertrand pour montrer que f est intégrable sur $]0,1/2]$ si et seulement si $a > -1$ ou si $a = -1$ et $b < -1$. Donc f est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $a > -1$ et $b > -1$ (dans le cas $a = -1$ les deux conditions, $b < -1$ et $b > -1$, obtenues pour chacune des bornes sont simultanément impossibles).

2. Puisque f est intégrable sur $]0,1[$ et que la fonction $u \mapsto e^{-u}$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$,

$$I(a,b) = \int_{+\infty}^{0} e^{-au} u^b (-e^{-u}\,du) = \int_0^{+\infty} u^b e^{-(a+1)u}\,du,$$

qui est le premier résultat demandé. On effectue alors le changement $t=(a+1)u$ ($t \mapsto t/(a+1)$ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même), on obtient

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{a+1}\right)^b e^{-t}\,\frac{dt}{a+1} = \frac{1}{(a+1)^{b+1}} \int_0^{+\infty} t^b e^{-t}\,dt,$$

et ainsi $I(a,b) = \dfrac{1}{(a+1)^{b+1}} I(0,b)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A>0$, $\displaystyle\int_0^A t^n e^{-t}\,dt = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^A + n\int_0^A t^{n-1}e^{-t}\,dt$, ce qui donne la relation $I(0,n) = nI(0,n-1)$ par passage à la limite. Par récurrence, on montre alors que $I(0,n) = n!I(0,0)$ avec $I(0,0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$ et, pour $a>-1$ et $n \in \mathbb{N}$, $I(a,n) = \dfrac{n!}{(a+1)^{b+1}}$.

Exercice 5.9

La fonction f est continue sur $]0,1[$. On étudie l'intégrabilité sur $]0,1/2]$ puis sur $[1/2,1[$.
On a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} |\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(1/\sqrt{x}\right)$ (car $\sqrt{x}|\ln x|^\beta$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, par croissances comparées si $\beta>0$, directement sinon), donc f est intégrable sur $]0,1/2]$. De plus, $|f(x)| \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{|x-1|^\beta}{|x-1|^\alpha} = \dfrac{1}{(1-x)^{\alpha-\beta}}$, donc f est donc intégrable sur $[1/2,1[$ si et seulement si $\alpha-\beta<1$.
La fonction f est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $\alpha-\beta<1$.

Exercice 5.10

→ La fonction f est continue sur $]0,1[$. On a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$, ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $]0,1/2]$. Par ailleurs, $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \ln((1-x)(1+x)) = \ln(1-x)+\ln(1+x) \underset{x\to 1}{\sim} \ln(1-x)$. La fonction $t\mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0,1/2]$, donc par symétrie, f est intégrable sur $[1/2,1[$. Donc f est intégrable sur $]0,1[$.

→ Soit $0<a<b<1$. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \left[-\frac{1}{x}\ln(1-x^2)\right]_a^b - \int_a^b \frac{2x}{x(1-x^2)}\,dx\\ &= -\frac{\ln(1-b)+\ln(1+b)}{b} + \frac{\ln(1-a^2)}{a} - \int_a^b \frac{2}{(1-x)(1+x)}\,dx.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ donc

$$\int_a^b \frac{2}{(1-x)(1+x)}\,dx = \ln(1+b) - \ln(1+a) - (\ln(1-b)-\ln(1-a)).$$

On regroupe les termes qui ont une limite infinie :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \left(-\frac{\ln(1-b)}{b} + \ln(1-b)\right)\\ &\quad + \left(-\frac{\ln(1+b)}{b} + \frac{\ln(1-a^2)}{a} + \ln(1+a) - \ln(1+b) - \ln(1-a)\right)\end{aligned}$$

Or $\ln(1-b) - \dfrac{\ln(1-b)}{b} = \dfrac{(b-1)\ln(1-b)}{b}$ tend vers 0 par croissances comparées lorsque b tend vers 1. Finalement, en faisant tendre a vers 0 et b vers 1, on obtient

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\ln 2 + 0 + 0 - \ln 2 - 0 = -2\ln 2.$$

Exercice 5.11

1. Soit $f(x) = x^{r-1}(1-x)^{s-1}$. La fonction est continue sur $]0,1[$ (dans certains cas, on peut fermer les extrémités mais cela donnent plusieurs cas à étudier alors qu'on peut le faire de façon générale). On a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-r}}$ et f est intégrable sur $]0,1/2]$ si et seulement si $1-r<1$ soit $r>0$. De même $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} (1-x)^{s-1}$ et f est intégrable sur $[1/2,1[$ si et seulement si $s>0$.

2. On note $I = I(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2^2}-(x-\frac{1}{2})^2}}$. Cela donne $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = [\arcsin(2x-1)]_0^1 = 2\arcsin(1) = \pi$.

Exercice 5.12

1. → Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$. Cette fonction est continue sur $]0,+\infty[$, de limite finie 1 en 0 (d'où l'intégabilité sur $]0,1[$) et est négligeable devant $1/x^{3/2}$ en $+\infty$. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   → Soit $0<\varepsilon<a$. On a
$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^a f(x)\,dx &= \left[-\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right]_\varepsilon^a+\int_\varepsilon^a \frac{2x}{x(1+x^2)}\,dx\\ &= \frac{\ln(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon}-\frac{\ln(1+a^2)}{a}+2(\arctan(a)-\arctan\varepsilon)\end{aligned}$$
   Par équivalent (en 0) et croissances comparées en $+\infty$, on peut passer aux limites et obtenir $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx=\pi$.
2. L'application f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi : t\mapsto \frac{1}{t}$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même. On obtient, via ce changement de variable,
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx=-\int_{+\infty}^0\ln(1+\frac{1}{t^2})\,dt=\int_0^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{t^2})\,dt=\pi.$$

Exercice 5.13

On cherche simplement à majorer $|g|$. Pour tout $x\in I$, $|g(x)|\leqslant\max(|f(x)|,|h(x)|)$ et plus simplement, pour se débarasser des valeurs absolues (elles sont positives), $|g(x)|\leqslant|f(x)|+|h(x)|$. La fonction $|f|+|h|$ est intégrable sur I, par comparaison g aussi.

Exercice 5.14

1. La fonction f est décroissante donc admet une limite finie ℓ ou $-\infty$ en $+\infty$. Dans le cas où la limite est infinie, on peut majorer f par -1, d"où la non-intégrabilité. Dans le cas d'une limite finie $\ell\neq 0$, on a $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ell$, non intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En conclusion ℓ est nécessairement nulle (ce n'est pas suffisant). On en déduit également que f est à valeurs positives.
2. On écrit $\displaystyle\int_{x/2}^x f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^{x/2}f(t)\,dt$. Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, chacune des deux intégrales a la même limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Par différence, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{x/2}^x f(t)\,dt=0$.
3. Par décroissante (et positivité de f),
$$0\leqslant\int_{x/2}^x f(x)\,dt\leqslant\int_{x/2}^x f(t)\,dt.$$
   Or $\displaystyle\int_{x/2}^x f(x)\,dt=\frac{x}{2}f(x)$. par encadrement, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$.

Exercice 5.15

1. On a l'inégalité classique $|ff''|\leqslant\frac{1}{2}\left(|f|^2+|f''|^2\right)$. Par hypothèse, chacune des fonctions estt intégrable, donc ff'' aussi.
   (a) On intègre par parties pour faire apparaître les termes démandées. Soit $X>0$,
$$\int_0^X f'(t)f'(t)\,dt=[f(t)f'(t)]_0^X-\int_0^X ff''(t)\,dt.$$
   Puisque ff'' est intégrable, l'intégrale $\displaystyle\int_0^X ff''(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$. Si f'^2 nest pas intégable sur $\mathbb{R}^+$, la fonction étant positive, on a $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}f'^2=+\infty$. L'égalité précédente montre que ff' tend vers $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$.
   (b) On écrit simplement que $\displaystyle 2\int_0^X ff'=f^2(X)-f^2(0)$, ce qui donne le résultat.
   (c) Si f^2 tend vers $+\infty$, elle ne peut pas être intégable sur $\mathbb{R}^+$. On obtient une contradiction. L'hypothèse de non-intégrabilité de f'^2 est donc impossible.
2. On reprend la première intégration par parties. Elle donne alors
$$\int_0^X f'^2(t)\,dt=f(X)f'(X)-\int_0^X ff''(t)\,dt.$$
   On en déduit notamment l'existence d'une limite finie pour $ff'(X)$ en $+\infty$ (les deux intégrales convergent). Si cette limite est non nulle, la question 3 redonne une limite infinie pour f^2 et de nouveau la non-intégabilité. Ainsi ff' tend vers 0 en $+\infty$. On obtient ainsi
$$\int_0^{+\infty}f'^2(t)\,dt=-\int_0^{+\infty}ff''(t)\,dt.$$
   On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\displaystyle\int_0^X ff''(t)\,dt$, on passe à la limite $X\to+\infty$, ce qui donne une inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left|\int_0^{+\infty}ff''(t)\,dt\right|^2\leqslant\int_0^{+\infty}f^2(t)\,dt.\int_0^{+\infty}f''^2(t)\,dt.$$
   On peut alors terminer avec ce résultat.

Exercice 5.16

1. L'intégrale est convergente (voir cour). On intègre par parties :

$$\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_{n\pi}^{+\infty} - \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt = \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

   De plus $\left|\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| \leqslant \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{n\pi}$. Finalement $\left|\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{2}{n\pi}$.
2. On note F la primitive de f qui s'annule en 0. Les autres s'obtiennent en ajoutant une constante. Ainsi si F est paire et 2π périodique, ce sera le cas de toutes les autres primitives. On a $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ et F est de période 2π si et seulement si $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. La parité est immédiate par changement de variable « $t = -u$ ».
3. On note F l'une des primitives. Elle est alors bornée sur $[0, 2\pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par périodicité. On note M un majorant de F sur $\mathbb{R}$. En intègrant par parties, on a

$$\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \left[\frac{F(t)}{t}\right]_{n\pi}^{+\infty} - \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt$$

   et le même raisonnement que dans la première question donne $\left|\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{F(t)}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{2M}{n\pi}$.

Exercice 5.17

1. On intègre par parties pour augmenter l'exposant : voir cours
2. On linéarise $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ et on obtient alors

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{2t}\,dt - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,dt.$$

   Pour les mêmes raisons que dans la première question, la seconde intégrale est convergente alors que la première est divergente. On en déduit la divergence de $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$.
3. On effectue un développement asymptotique de la fonction

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \frac{1}{1+\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{t} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

   L'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ est convergente, le troisième terme (en $\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$) est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ et l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ est divergente. On en déduit que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}+\sin t}\,dt$. On a trouvé un exemple avec deux fonctions équivalentes en $+\infty$ avec des intégrales de nature différente.
4. Puisque $\alpha > 1$, les intégrales qu'on va écrire sont toutes convergentes. On a, toujours en linéarisant,

$$\begin{aligned} 2\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\,dt &= \int_x^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{t^\alpha}\,dt \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^\alpha}\,dt. \end{aligned}$$

   On s'attend à ce que la seconde intégrale soit bien plus petite grâce aux oscillations du cosinus qui compensent les termes. Une majoration simple ne suffit pas et on doit intégrer par parties :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^\alpha}\,dt = -\frac{\sin(2x)}{2x^\alpha} + \frac{\alpha}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t^{\alpha+1}}\,dt.$$

   En majorant, on a

$$\left|\alpha\int_x^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t^{\alpha+1}}\,dt\right| \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\,dt = \frac{1}{x^\alpha}.$$

   Tout cela donne $\int_x^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^\alpha}\,dt = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$, terme négligeable devant $\frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Finalement

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2(\alpha-1)x^{\alpha-1}}.$$

   On s'inspire de cela pour trouver l'autre équivalent.

Exercice 5.18

On note $f(t) = \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)$. La fonction est continue sur $]0, +\infty[$. On va fortement utiliser l'exercice précédent :

→ $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^a}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $a > 1$,

→ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}\,dt$ converge si et seulement si $a > 0$.

1. Étude sur $]0,1]$: on a $\dfrac{\sin t}{t^a} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t^a} = t^{1-a}$.
   → si $a = 1$, la fonction f se prolonge par continuité en 0 (par la valeur $\ln 2$) et f est intégrable sur $]0,1]$,
   → si $a < 1$, on a $f(t)$ tend vers 0 en 0 et f est intégrable sur $]0,1]$,
   → si $a > 1$, on a $\ln(1+\dfrac{\sin t}{t^a}) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t^{1-a}) = (1-a)\ln t = \mathrm{o}(\dfrac{1}{\sqrt{t}})$ et f est intégrable sur $]0,1]$.
2. Étude sur $[1,+\infty[$:
   → On a $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{|\sin t|}{t^a}$ et les deux fonctions sont intégrables sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $a > 1$.
   → Si on s'intéresse à la convergence de l'intégrale. On effectue un développement asymptotique :

$$f(t) = \frac{\sin t}{t^a} - \frac{\sin^2 t}{2t^{2a}} + \mathrm{o}\left(\frac{\sin^2 t}{t^{2a}}\right).$$

   On note $g(t) = f(t) - \dfrac{\sin t}{t^a}$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^a}\,dt$ converge. Puisque $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\sin^2 t}{2t^{2a}} \leqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge si et seulement si g est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc si et seulement si $2a > 1$ ou $a > 1/2$.

Exercice 5.19

1. On suppose que f est décroissante sur $]0,1]$. On encadre les termes par comparaison à une intégrale. Pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, on a

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

   ce qui donne, en sommant

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

   De même, en sommant, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt$, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt.$$

   On obtient finalement l'encadrement

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt + \frac{1}{n} f(1) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt.$$

   Puisque f est intégrable, lorsque n tend vers $+\infty$, on a la limite par encadrement.
2. On note u_n le logarithme de ce terme. Il vaut, en écrivant $\dfrac{n!}{n^n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n}$,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n}.$$

   On se retrouve dans la situation précédente avec la fonction logarithme. Elle est bien décroissante et intégrable sur $]0,1]$. On a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \ln t\,dt = [t\ln t - t]_0^1 = -1$. La limite cherchée vaut $\frac{1}{e}$.
3. Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, on obtient comme limite $\exp\left(\displaystyle\int_0^1 \ln\sin\frac{\pi t}{2}\,dt\right)$ qui vaut également, après changement de variable linéaire $\exp\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt\right)$ (on doit montrer que la fonction est bien décroissante et intégrable). Il reste la seconde méthode de calcul... c'est une autre histoire puisqu'il faut effectivement calculer le produit des sinus. Le moyen le plus simple est de considérer le polynôme

$$P = \frac{X^n - 1}{X - 1} = 1 + X + \ldots + X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - e^{2ik\pi/n}\right),$$

   de l'évaluer en 1 et de faire apparaître les sinus en factorisant $1 - e^{2ik\pi/n}$ par $e^{ik\pi/n}$. On trouve finalement $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
   Cela donne $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = -\ln 2$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 5.20

1. Tout est basé sur un développement asymptotique de la fonction (f est continue sur $[1,+\infty[$) :
$$f(t)=\sqrt{t-\cos t}-\sqrt{t}=\sqrt{t}\left((1-\frac{\cos t}{t})^{1/2}-1\right)=-\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$
On note $f_1(t)=-\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}$ et $f_2=f-f_1$. La fonction f_2 est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc f l'est si et seulement si f_1 l'est. Ce n'est pas le cas (voir cours ou autres exercices). En revanche l'intégrale de f_1 sur $[1,+\infty[$ est convergente (par intégration par parties), donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ l'est également.
2. On a $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim} f_1(t)$ et $|f(t)|\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}$. On va utiliser le théorème de sommation des équivalents : les fonctions $|f|$ et $|f_1|$ sont non intégrables et équivalentes en $+\infty$ donc
$$\int_1^x |f(t)|\,dt\underset{x\to+\infty}{\sim}\int_1^x\frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\,dt.$$
Pour trouver un équivalent, on se contente d'obtenir celui de $\int_{\pi/2}^x\frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\,dt$.
   - → méthode 1 : on note $G(x)=\int_{\pi/2}^x|\cos t|\,dt$. si $-\frac{\pi}{2}+n\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+n\pi$, on a $G(-\frac{\pi}{2}+n\pi)\leqslant G(x)<G(\frac{\pi}{2}+n\pi)$. Par encadrement, il suffit d'avoir un équivalent de $G(x)$ lorsque $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$. Un calcul simple donne $\int_{\pi/2}^{\pi/2+n\pi}|\cos t|\,dt=2n\sim\frac{2}{\pi}x$ si $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$. On en déduit par encadrement que $G(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\pi}x$. On intègre par parties :
$$\int_{\pi/2}^x\frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\,dt=\frac{G(x)}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{4}\int_{\pi/2}^x\frac{G(t)}{t^{3/2}}\,dt.$$
Le premier terme est équivalent à $\frac{\sqrt{x}}{\pi}$. Pour la seconde intégrale, on a $\frac{G(t)}{4t^{3/2}}\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\pi\sqrt{t}}$. Le théorème de sommation des équivalents donne un équivalent en $\frac{\sqrt{x}}{\pi}$. Finalement, $\int_{\pi/2}^x|f(t)|\,dt\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\pi}\sqrt{x}$.
   - → méthode 2 : on commence par un équivalent de $\int_{\pi/2}^{\pi/2+n\pi}\frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\,dt$ en sommant sur les différentes arches qui apparaissent. On découpe
$$I_n=\int_{\pi/2}^{\pi/2+n\pi}\frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\pi/2+k\pi}^{\pi/2+(k+1)\pi}\frac{|\cos t|}{2\sqrt{t}}\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{|\cos t|}{2\sqrt{t+k\pi}}\,dt.$$
Par encadrement du dénominateur, on obtient
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{|\cos t|}{2\sqrt{t+k\pi}}\,dt\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{k\pi}}.$$
Enfin par sommation des équivalents sur les séries, et puisque
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\int_1^n\frac{dt}{\sqrt{t}}\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{n},$$
on trouve finalement
$$I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\pi}\sqrt{n\pi}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}.$$
Pour x quelconque, on l'encadre en $\frac{\pi}{2}+n\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi$, on utilise l'équivalent précédent et on trouve $\int_1^x|f(t)|\,dt\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\pi}\sqrt{x}$.

Exercice 5.21

1. On a directement $I(0)=\int_0^{2\pi}\ln 1\,dt=0$.
2. Soit $f(t)=\ln\sin t$. Cette fonction est continue sur $]0,\pi[$ et on a la symétrie $(\pi-t)=f(t)$. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité sur $]0,\frac{\pi}{2}$. On a $\sin t=t(1+o(1))$ et $\ln(\sin t)=\ln t+\ln(1+o(1))\underset{t\to0}{\sim}\ln t=\underset{t\to0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. La fonction est donc intégrable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et donc sur $]0,\pi[$. On a de plus, pour $t\in]0,2\pi[$,
$$e^{it}-1=e^{it/2}2i\sin\frac{t}{2}\text{ et }|e^{it}-1|=2\sin(t/2)\text{ ainsi que }\ln|e^{it}-1|=\ln 2+\ln\sin(t/2).$$
Par changement de variable linéaire, la fonction $t\mapsto\ln\sin t$ est intégrable sur $]0,\pi[$ donc la fonction $t\mapsto\ln\sin(t/2)$ est intégrable sur $]0,2\pi[$. Cela donne l'existence de $I(1)$.
3. On commence par étudier la continuité. La fonction $t\mapsto|e^{it}-a|$ s'annule si et seulement si il existe $t_0\in[0,2\pi]$ tel que $e^{it_0}=a$ donc si et seulement si a est de module 1.
   - → si $|a|=1$. Soit $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $a=e^{i\theta}$. La fonction $f:t\mapsto\ln|e^{it}-a|$ est continue sur $[0,\theta[$ et $]\theta,2\pi]$ (le premier pouvant éventuellement être vide). On a alors $\ln|e^{it}-e^{i\theta}|=|e^{i(t-\theta)}-1||e^{i\theta}|=|e^{i(t-\theta)}-1|$. On a prouvé que $u\mapsto\ln|e^{iu}-1|$ est intégrable sur $]0,2\pi[$ et elle est de période 2π. Par translation de θ, f est intégrable sur les deux intervalles cités. De plus
$$I(a)=\int_0^{2\pi}\ln|e^{it}-e^{i\theta}|\,dt=\int_0^{2\pi}\ln|e^{i(t-\theta)}-1|\,dt=\int_\theta^{2\pi+\theta}\ln|e^{it}-1|\,dt,$$
et par 2π-périodocité, cette dernière intégrale sur une période est égale à celle sur $]0,2\pi[$. Si $|a|=1$, alors on a le résultat demandé.

→ si $|a| \neq 1$, alors $t \mapsto \ln|e^{it} - a|$ est continue sur $[0, 2\pi]$ donc $I(a)$ existe. Comme précédemment (mais c'est plus simple), on a, en notant $a = |a|e^{i\theta}$,

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \ln|e^{it} - |a|e^{i\theta}|\, dt = \int_0^{2\pi} \ln|e^{i(t-\theta)} - |a||\, dt,$$

et le même changement de variable donne $I(a) = I(|a|)$ dans toutes les situations.

4. (a) On factorise $P = \alpha \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$. On a alors $\ln|P(e^{it})| = \ln|\alpha| + \sum_{j=1}^{n} \ln|e^{it} - a_j|$ et chacun des termes de la somme a une intégrale entr e0 et 2π.

(b) On factorise, en posant $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$: $X^n - b^n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - b\omega_k)$. En utilisant la question 3, on a $I(b\omega_k) = I(|b\omega_k|) = I(b)$. Ainsi

$$M(X^n - b^n) = \sum_{k=0}^{n-1} I(b\omega_k) = \sum_{k=0}^{n-1} I(b) = nI(b) = nM(X - b).$$

(c) On commence par le cas $b \in]0, 1[$. On a $M(X - b) = \frac{1}{n} M(X^n - b^n) = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \ln|e^{int} - b^n|\, dt$. On a, pour $n \geqslant 1$,

$$|e^{int}| - b^n \leqslant |e^{int} - b^n| \leqslant |e^{int}| + |b^n| \leqslant 2,$$

notamment $|e^{int}| - b^n = 1 - b^n \geqslant 1 - b$. Ainsi, par croissante du logarithme, on a $\ln(1 - b) \leqslant \ln|e^{int} - b^n| \leqslant \ln 2$, puis

$$\frac{2\pi}{n} \ln(1 - b) \leqslant \frac{1}{n} M(X^n - b^n) \leqslant \frac{2\pi}{n} \ln(2).$$

Par encadrement, la limite de $\frac{1}{n} M(X^n - b^n)$ est nulle lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit que $M(X - b) = 0$ si $b \in]0, 1[$.
On passe au cas $b > 1$, en transformant l'expression :

$$M(X - b) = \int_0^{2\pi} \ln|e^{it} - b|\, dt = \int_0^{2\pi} \ln(|\frac{1}{b} e^{it} - 1|.b)\, dt = 2\pi \ln b + \int_0^{2\pi} \ln(|\frac{1}{b} - e^{-it}||e^{it})\, dt,$$

en utilisant la périodicité de $t \mapsto e^{-it}$, puis un changement de variable « $u = -t$ », on a

$$\int_0^{2\pi} \ln(|\frac{1}{b} - e^{-it}|\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|\frac{1}{b} - e^{-it}|\, dt = -\int_{\pi}^{-\pi} \ln(|\frac{1}{b} - e^{iu}|\, du = \int_0^{2\pi} \ln(|\frac{1}{b} - e^{iu}|\, du$$

et cette dernière intégrale est nulle. On a donc $M(X - b) = 2\pi \ln b$ si $b > 1$.

(d) Plusieurs possibilités pour ce calcul :

→ on reprend l'écriture $I(1) = \int_0^{2\pi} \ln|2\sin(t/2)|\, dt = 2\pi \ln 2 + \int_0^{2\pi} \ln|\sin(t/2)|\, dt = 2\pi \ln 2 + 2\int_0^{\pi} \ln \sin(t)\, dt$. Il reste à calculer cette dernière intégrale à part (différentes techniques... par exemple en trouvant différentes relations avec $\int_0^{\pi} \ln \cos(t)\, dt$).

→ Puisqu'on a trouvé que $I(b) = 0$ si $b \in]0, 1[$ et $I(b) = 2\pi \ln b$ si $b > 1$, on peut se demander si la fonction est continue en 1 - ce qui donnerait $I(1) = 0$. On pose $f(t, b) = \ln|e^{it} - b| = \frac{1}{2} \ln((\cos t - b)^2 + \sin^2 t)$ pour $(t, b) \in]0, 2\pi[\times \mathbb{R}^+$. Soit $A > 0$. Pour tout $b \in [0, A]$, $f(\cdot, b)$ est continue sur $]0, 2\pi[$, pour tout $t \in]0, 2\pi[$, $f(t, \cdot)$ est continue sur $[0, A]$ et

$$\sin^2 t \leqslant (\cos t - b)^2 + \sin^2 t \leqslant (1 + A)^2 + \sin^2 t,$$

ce qui donne

$$\ln \sin^2 t \leqslant \ln\Big((\cos t - b)^2 + \sin^2 t\Big) \leqslant \ln\Big((1 + A)^2 + \sin^2 t\Big),$$

et ainsi

$$\begin{aligned} |f(t, b)| &\leqslant \frac{1}{2} \max(|\ln \sin^2 t|, \Big|\ln\Big((1 + A)^2 + \sin^2 t\Big)\Big|) \\ &\leqslant \frac{1}{2} \Big(|\ln \sin^2 t| + \Big|\ln\Big((1 + A)^2 + \sin^2 t\Big)\Big|\Big) \end{aligned}$$

Les deux fonctions qui apparaissent sont intégrables sur $]0, 2\pi[$ donc I est continue sur $[0, A]$ pour tout $A > 0$.

(e) On factorise $P = \alpha \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$ et $M(P) = 2\pi \ln|\alpha| + \sum_{k=1}^{n} I(|a_k|) = 2\pi \ln|\alpha| + 2\pi \sum_{|a_k| > 1} \ln|a_k|$.