4 Intégration sur un segment

I. Propriétés générales

L'essentiel

- → construction de l'intégrale sur un segment pour une fonction en escalier, extension aux fonctions continues par morceaux
- → notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et relation de Chasles
- → propriétés : linéarité, positivité et croissance
- → si f est **continue, positive** sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ si et seulement si $f = 0$
- → inégalité triangulaire pour une fonction continue par morceaux
- → cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour une fonction **continue** : de signe constant pour une fonction à valeurs réelles, d'argument constant pour une fonction à valeurs complexes
- → inégalité de Cauchy-Schwarz (continue par morceaux), cas d'égalité

L'essentiel *(sommes de Riemann)*

- → Si f est continue par morceaux sur le **segment** $[a,b]$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$
- → on peut toujours se ramener à $[0,1]$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$.
- → on peut supprimer/ajouter un nombre fini fixe d'indices dans la somme (commencer à 1, finir à n...)

L'essentiel *(théorèmes d'approximation)*

- → si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ en escalier telle que $\|f-\varphi\|_\infty < \varepsilon$.
- → si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale P telle que $\|f-P\|_\infty < \varepsilon$.

Exercice 1

Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt\right).\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right) \geqslant (b-a)^2.$$

Pour quelles fonctions y a-t-il égalité ?

Exercice 2

Déterminer les limites des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$ e) $\displaystyle\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$

II. Primitives

Théorème 1 *(théorème fondamental sur les primitives)*

Soit f une fonction continue (par morceaux) sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a

L'essentiel *(primitives)*

- → On appelle primitive d'une fonction continue f sur I toute fonction F de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que $F' = f$.
- → existence : $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a,
- → si f est continue par morceaux sur I et F une primitive de f sur I, alors pour tout $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$,
- → si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $a \in I$, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$.

Exercice 3

Étudier $F : x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ (variations, limites aux bornes...)

III. CALCULS

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

L'essentiel

→ Intégration par parties : si f, g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

→ Intégration par parties généralisée : si f, g sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur un segment $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(t)g^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,dt.$$

→ Changement de variable : soit f **continue** sur un intervalle I, et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans I, on a

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

→ Changement de variable bijectif : soit f **continue par morceaux** sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et φ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle I sur un intervalle J contenant $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

L'essentiel *(formules de Taylor)*

Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Si $a \in I$, alors pour tout $x \in I$,

→ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$, avec $R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$ (appelé reste-intégrale),

→ si $|f^{(n+1)}|$ est bornée par M_{n+1} sur I, alors on obtient la majoration $|R_n(x)| \leqslant M_{n+1}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

→ *Inégalité de Taylor-Lagrange* : si $|f^{(n+1)}|$ est bornée par M_{n+1} sur $[a, b]$, alors

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant M_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

→ soit f de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $a \in I$. Il existe une fonction ε, définie sur I, telle que

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0.$$

L'essentiel *(symétries, périodicité)*

Si f est une fonction continue par morceaux, alors

→ si f est *paire* sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$,

→ si f est *impaire* sur $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$,

→ si f est de période T, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt$ (périodicité),
- $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt$ (l'intégrale sur une période ne dépend pas du point de départ).

MÉTHODES DE CALCULS

Méthode *(Fractions rationnelles)*

On décompose la fraction rationelle en éléments simples et on calcule les intégrales de chacun des termes

→ Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^n}$ sur $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ est la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{(t-a)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1, \\ \ln|t-a| & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

→ Pour les fonctions à intégrer sous la forme $t \mapsto \dfrac{1}{(at^2+bt+c)^n}$ (qui ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$), on commence par effectuer un mise sous forme canonique afin de se ramener à des primitives de fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^n}$. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ est $t \mapsto \arctan t$. Lorsque $n \geqslant 2$, on cherche, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre I_n et I_{n+1} où I_n est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^n}$

Méthode *(Polynômes trigonométriques)*

On doit chercher des primitives $\displaystyle\int \sin^n t \cos^m t \, dt$.

→ Par primitive directe : si l'un des exposants est impair, on peut faire apparaître des termes sous la forme $u'u^n$. Par exemple, si $m = 2p+1$, on écrit

$$\sin^n t \cos^m t = \sin^n t (\cos^{2p} t) \cos t = \left(\sin^n t (1-\sin^2 t)^p\right) \cos t.$$

En développant le terme à la puissance p, on fait apparaître une combinaison de termes sous la forme $\sin^q t \cos t$ qui s'intègrent facilement.

→ Par linéarisation : (dans le cas m et n pairs) en utilisant les formules de trigonométrie ou les formules d'Euler.

Méthode *(Polynômes et exponentielles)*

On cherche des primitives de fonctions $t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est un polynôme de degré n et α un réel ou un complexe non nul (cela permet de traiter le cas des fonctions sinus et cosinus). Une telle primitive est de la forme $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n. On détermine cette primitive en dérivant $t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ puis en identifiant les coefficients du polynôme en facteur de $e^{\alpha t}$ dans cette dérivée avec ceux de P.

Méthode *(Fractions $F(\sin x, \cos x)$)*

→ on peut utiliser le changement de variable $t = \tan(x/2)$ combiné aux formules

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

→ règles de Bioche : si la quantité $F(\sin x, \cos x)\, dx$ est invariante (ne pas oublier le « dx ») lorsqu'on remplace

- x par $-x$: $u = \cos x$
- x par $\pi - x$: $u = \sin x$
- x par $x + \pi$: $u = \tan x$.

Méthode *(Fractions $F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$)*

Après mise sous forme canonique de ax^2+bx+c et après un changement de variable affine, on se trouve dans l'une des situations suivantes (le but est de transformer à l'aide des formules de trigonométries la partie sous la racine en un carré) :

→ $\displaystyle\int G(u, \sqrt{1-u^2})\, du$: on utilise le changement de variable $u = \sin t$ ou $u = \cos t$.

→ $\displaystyle\int G(u, \sqrt{u^2-1})\, du$: on utilise le changement de variable $u = \operatorname{ch} t$ (alors $\sqrt{u^2-1} = \pm \operatorname{sh} t$) ou $u = \dfrac{1}{\cos t}$ (alors $\sqrt{u^2-1} = \pm \tan t$).

→ $\displaystyle\int G(u, \sqrt{u^2+1})\, du$: on utilise le changement de variable $u = \operatorname{sh} t$ (alors $\sqrt{u^2+1} = \pm \operatorname{ch} t$).

Exercice 4

Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \arctan\sqrt{1-x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ d) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx$

Exercice 5

Calculer les primitives des fonctions suivantes suivantes sur les intervalles (que l'on précisera) où elles sont continues

a) $x \mapsto x \arctan x$

b) $x \mapsto x(\arctan x)^2$

c) $x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x$

d) $x \mapsto \dfrac{1}{3e^x + 2e^{-x}}$

e) $x \mapsto e^x(2x^2 + x + 1)$

f) $x \mapsto e^{3x}(\cos x + 2\sin x)$

g) $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

h) $x \mapsto \operatorname{ch} x \sin 2x$

i) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$

j) $x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}$

IV. EXERCICES

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n \tan x\,dx$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n \tan x\,dx$

Exercice 7

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 1$
2. Montrer que $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 8

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On définit F pour $x \in [0,1]$ par

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,dt.$$

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et déterminer F''. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt\right) du.$$

Exercice 9

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

1. Étudier la fonction f.
2. Donner un équivalent simple de f en 0.
3. Comparer $f(x)$ et $f(\frac{1}{2x})$ et en déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Exercice 10

1. Étudier $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction réelle f définie pour tout x par l'égalité $\displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = 1$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Étudier ses variations, ses limites.
3. Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est un axe de symétrie du graphe.

Exercice 11 *(Mines-Ponts)*

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$. Déterminer l'ensemble de définition de F, et montrer que F est constante. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \arcsin\sqrt{t}\,dt$.

Exercice 12

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a < b$ deux réels. Montrer $x \mapsto \int_a^b f(x+t)\cos t\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

1. Montrer que pour $x > -\frac{1}{2}$, on a $x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Soit f continue sur $[0,1]$ et x réel. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{n} f(\frac{k}{n})\right)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k+n}\right)$.

Exercice 14 *(important)*

Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Relier $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ à $\int_0^T f(t)\,dt$

Exercice 15 *(Centrale MP)* ✫

Soit $a \in]0,1]$. Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{ax} f$.

Exercice 16

Déterminer la limite de $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 17 *(Mines MP)*

Déterminer la limite de la suite $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 18

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle (avec $a < b$). On note M le maximum de f sur $[a,b]$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0,M[$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_a^b f(t)^n\,dt \geqslant \alpha(M-\varepsilon)^n.$$
2. Déterminer la limite, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n}$.

Exercice 19 *(Théorème de relèvement)* ✫

1. Soit $f : I \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Justifier l'existence d'une fonction $g : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f = \exp\circ g$ (faire apparaître une équation différentielle vérifiée par g).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ de période 2π. Montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \in \mathbb{Z}$.

Exercice 20 *(Mines MP 2016)* ✫

1. Soit$u \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^u |\sin(\lambda t)|\,dt$. Puis, pour $\alpha,\beta > 0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)|\,dt$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt$.