CHAPITRE 4 - INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Exercice 4.1

Puisque f est strictement positive, on a $f = (\sqrt{f})^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}.\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)\,dt\right).\left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\right),$$

c'est-à-dire $\left(\int_a^b f(t)\,dt\right).\left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\right) \geqslant \left(\int_a^b dt\right)^2 = (b-a)^2$. De plus, il y a égalité si et seulement si les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$ sont proportionnelles, c'est-à-dire lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}$ (et même $k>0$) tel que $\sqrt{f} = k/\sqrt{f}$. Ainsi il y a égalité si et seulement si f est constante.

Exercice 4.2

a) on a directement une somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, définie et continue sur $[0,1]$. La limite vaut alors $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

b) On ne parvient pas à faire apparaître une somme de Riemann. Ici un simple encadrement convient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$$

ce qui donne

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Par encadrement, la limite est 1.

c) On récrit l'expression sous la forme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}$, somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. La limite vaut $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

d) Somme de Riemman pour $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. La limite est $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(1+\sqrt{2})$ (pourquoi ?).

e) On encadre en utilisant $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. On note S_n la somme recherchée et on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{n}{n^{3/2}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

chaque coté converge vers $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$

Exercice 4.3

→ soit $f : t \mapsto e^{t^2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et F est sa primitive qui s'annule en 0. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F'(x) = e^{x^2} > 0$. La fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

→ Le changement de variable « $u = -t$ » permet d'obtenir que $F(-x) = -F(x)$ et F est impaire.

→ Si $x > 0$, pour tout $t \in [0,x]$, on a $e^{t^2} \geqslant 1$ donc $F(x) \geqslant \int_0^x dt = x$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Exercice 4.4

a) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$

b) les fonctions qui apparaissent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1/2]$. Cela permet d'intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I = \int_0^{1/2} \arctan\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[x\arctan\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(1+1-x^2)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2} + \int_0^{1/2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable « $x = \sin u$ » ou « $u = \arcsin(x)$ » :

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(2-x^2)}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 u}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u$$

Puisque l'expression « $\dfrac{\sin^2 u}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u$ » est invariante en remplaçant u par $u+\pi$, on peut effectuer le changement de variable $v=\tan u$. Cela donne, avec $\sin^2 u = \tan^2 u\cos^2 u = \dfrac{\tan^2}{1+\tan^2 u}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 u}{2-\sin^2 u}\mathrm{d}u \quad = \quad \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{v^2}{1+v^2}}{2-\frac{v^2}{1+v^2}}\frac{1}{1+v^2}\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)}\mathrm{d}v$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)} = \frac{2}{2+v^2} - \frac{1}{1+v^2}$$

et enfin

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{v^2}{(1+v^2)(2+v^2)}\mathrm{d}v = \sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{6}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On trouve alors

$$\int_0^{1/2} \arctan\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\pi}{6}$$

c) $\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

d) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{\pi(b-a)^2}{8}$

Exercice 4.5

a) $\frac{1}{2}x^2\arctan(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan(x)$

b) $\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)(\arctan x)^2 - x\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

c) $-\frac{1}{5}\sin x\cos^4 x + \frac{1}{15}\cos^2 x\sin^2 x + \frac{2}{15}\sin x$.

d) $\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sqrt{6}\right)$

e) $e^x(2x^2-3x+4)$

f) $\dfrac{e^{3x}}{10}(\cos x + 7\sin x)$

g) $\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\arctan(x)$

h) $\frac{1}{5}\operatorname{sh} x\sin(2x) - \frac{2}{5}\operatorname{ch} x\cos(2x)$

i) $\arcsin(x-1)$.

j) $\frac{1}{5}\ln|x+2| - \frac{1}{10}\ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{10}\arctan\frac{x+1}{2}$.

Exercice 4.6

On note I_n l'intégrale à chaque question.

1. $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$. Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \frac{1-e^{-n}}{n}$. Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. même principe : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\tan 1}{n+1}$.
4. La majoration précédente donne $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{n}{n+1}\tan 1$. Elle ne permet pas de conclure. On intègre par parties pour augmenter la puissance de n au dénominateur.

$$\begin{aligned} I_n &= \left[n\frac{x^{n+1}}{n+1}\tan x\right]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1+\tan^2 x)\,dx \\ &= \frac{n}{n+1}\tan 1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1+\tan^2 x)\,dx. \end{aligned}$$

Comme précédemment la nouvelle intégrale tend vers 0. Finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \tan 1$.

Exercice 4.7

1. Pour tout $x \in [0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^n} = 1$. On compare I_n à $\int_0^1 1\,dx$:
$$I_n - \int_0^1 dt = -\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx.$$
Ainsi $|I_n - 1| \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.
2. Cela revient à montre que $I_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln 2}{n}$, ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-I_n) = \ln 2$. On a
$$n(1-I_n) = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 x\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\,dx = \left[x\ln(1+x^n)\right]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx.$$
De plus $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}$, de limite nulle. On a montré ce que l'on souhaitait.

Exercice 4.8

→ On a $F(x) = \int_0^x tf(t)\,dt + \int_x^1 xf(t)\,dt = \int_0^x tf(t)\,dt - x\int_1^x f(t)\,dt$. Cette expression permet de montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ (théorème sur les primitives) et
$$F'(x) = xf(x) - xf(x) - \int_1^x f(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt.$$
On en déduit alors $F''(x) = -f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

→ On a déjà $F'(u) = \int_u^1 f(t)\,dt$ si $u \in [0,1]$. Puisque $F(0) = \int_0^1 \min(0,t)f(t)\,dt = 0$, la fonction F est la primitive de F' qui s'annule en 0, d'où $F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\,dt\right)du$.

Exercice 4.9

1. → Soit $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet une primitive G sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(2x) - G(x)$, ce qui donne la définition, continuité et dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2g(2x) - g(x)$.
   → Par un changement de variable « $u = -t$ », on montre que f est impaire. On ne l'étudie que sur $\mathbb{R}^+$.
   → On résout, sur $\mathbb{R}^+$, $f'(x) \geqslant 0$. Cela équivaut à $2\sqrt{x^4+x^2+1} \geqslant \sqrt{16x^4+4x^2+1}$, on encore, en élevant au carré (tout est positif), $x^4 \leqslant \frac{1}{4}$. La fonction f est croisante sur $[0, 1/\sqrt{2}]$, puis décroissante.
   → Pour $x > 0$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\sqrt{t^4}} = \int_x^{2x} \dfrac{dt}{t^2} = \dfrac{1}{2x}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. On a $g(0) = 1$ et $f'(0) = 2 - 1 = 1$. Puisque $f(0) = 0$, on a $f(x) - f(x) = f(x) \underset{x\to 0}{\sim} xf'(0) = x$.
3. On a
$$f\left(\frac{1}{2x}\right) = \int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \underset{u=1/t}{=} \int_{2x}^{x} \frac{u^2}{\sqrt{u^4+u^2+1}}\,\frac{-du}{u^2} = f(x).$$
En combinant avec la question précédente, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Exercice 4.10

1. La fonction $g : t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire. La fonction F (primitive qui s'annule en 0) est donc de classe $\mathscr{C}^1$ et impaire sur $\mathbb{R}$. On a $F' = g$ donc F est croissante. Pour $x > 0$, on a $F(x) \geqslant \int_0^x 1\,dt = x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. En conclusion F est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. L'équation est équivalente à $F(f(x)) - F(x) = 1$ soit $F(f(x)) = 1 + F(x)$. Puisque F est bijective, cela équivaut à $f(x) = F^{-1}(1+F(x))$. Cela justifie l'existence de f. Par composition, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$. Par composition des fonctions croissantes F^{-1} et $1+F$, la fonction f est croissante.
3. La symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$ est l'application $(x,y) \mapsto (-y,-x)$. Pour montrer que la droite est un axe de symétrie du graphe $\mathscr{C}$, on doit montrer que, si $(x,y) \in \mathscr{C}$, alors $(-y,-x) \in \mathscr{C}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = 1$. On effectue le changement de variable « $u = -t$ » dans cette relation. Cela donne $-\int_{-x}^{-f(x)} e^{u^2}\,du = 1$ soit $\int_{-f(x)}^{-x} e^{u^2}\,du = 1$. On en déduit que le point de coordonnées $(-f(x), -x)$ est encore sur $\mathscr{C}$.

Exercice 4.11

La fonction $t \mapsto \arcsin\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Soit A une de ses primitives sur ce segment. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $\sin^2 x \in [0,1]$), $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt = A(\sin^2 x)$, ce qui permet de dériver facilement (même chose pour le second terme). On obtient le fait que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
$$F'(x) = 2\sin x\cos x \arcsin\sqrt{\sin^2 x} - 2\sin x\cos x \arccos\sqrt{\cos^2(x)}.$$

La discussion sur les signes risque d'être pénible. Pour restreindre, on peut remarquer que F est paire et de période π. Il suffit donc de l'étudier sur $[0,\pi/2]$. Pour un tel x, on a

$$F'(x) = 2\sin x\cos x \arcsin(\sin x) - 2\sin x\cos x \arccos(\cos x) = 0.$$

La fonction est donc constante sur $[0,\pi/2]$ et par conséquent sur $\mathbb{R}$. La valeur demandée est $F(\pi/2)$. On cherche à évaluer ailleurs. Le calcul de $F(0)$ ne donne rien de bien simple. On se rapelle que $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$. Pour les regrouper, on calcule $F(\pi/4)$ qui donne $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{4}$. D'où $\int_0^1 \arcsin\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4.12

On note g la fonction et on effectue le changement de variable « $u = x + t$ » (translation). Cela donne

$$g(x) = \int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos(u-x)\,du = \cos(x)\int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos(u)\,du + \sin(x)\int_{a+x}^{b+x} f(u)\sin(u)\,du.$$

Sous cette forme, la fonction se dérive facilement (produit et théorème sur les primitives)...

Exercice 4.13

1. Pour la première inégalité, une étude de la fonction différence suffit. On peut procéder de même pour la seconde inégalité ou utiliser la concavité de la fonction logarithme : la courbe d'équation $y = \ln(1+x)$ est situé sous sa tangente en 0, d'équation $y = x$. Cela donne l'inégalité pour tout $x > -1$.
2. On aimerait passer au logarithme, mais rien de garantit que les facteurs sont positifs. En revanche $\frac{k}{n} \in [0,1]$, f est continue sur $[0,1]$ donc est bornée et il existe $M > 0$ tel que $|f| \leqslant M$ sur $[0,1]$. On a alors $\left|\frac{x}{n} f(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{M|x|}{n}$ et ce nombre est inférieur à $1/2$ dès que n est supérieur à un certain n_0 (dès que $n > 2M|x|$). On peut travailler pour n suffisamment grand et ainsi tous les facteurs sont strictement positifs. On note P_n le produit de n termes. On a alors
$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n} f(\frac{k}{n})\right)$$
Intuitivement, lorsque n est grand, le facteur $\ln\left(1 + \frac{x}{n} f(\frac{k}{n})\right)$ se comporte comme $\frac{x}{n} f(\frac{k}{n})$, sauf qu'on ne peut pas utiliser d'équivalent n'importe comment (ne surtout pas les sommer). On utilise l'encadrement de la première question (pour n suffisamment grand toujours, afin d'avoir $\left|\frac{x}{n} f(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{1}{2}$)
$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{x^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2(\frac{k}{n}) \leqslant \ln P_n \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}).$$
On applique le résultat sur les sommes de Riemann. Le terme de droite a pour limite $x\int_0^1 f(t)\,dt$. On majore le terme supplémentaire :
$$\left|\frac{x^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f^2(\frac{k}{n})\right| \leqslant \frac{x^2}{n^2} n.M = \frac{Mx^2}{n},$$
de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement, par encadrement, on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} \ln P_n = x\int_0^1 f(t)\,dt,$$
et par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} P_n = \exp\left(x\int_0^1 f(t)\,dt\right)$.
3. Avec la fonction $f : u \mapsto \frac{1}{1+u}$, on a l'écriture générale. La limite cherchée est donc $\exp(x\ln 2) = 2^x$.

Exercice 4.14

On découpe l'intégrale en morceaux de longueur T. Soit $x > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nT \leqslant x < (n+1)T$. Plus précisément, on a $n = E(x/T)$, qu'on note $n(x)$. L'encadrement précédent donne $1 - \frac{T}{x} < \frac{n(x)T}{x} \leqslant 1$, ce qui donne $\lim_{x\to+\infty} \frac{n(x)}{x} = \frac{1}{T}$ (on s'en sert après). On a alors, en notant $I(x) = \int_0^x f(t)\,dt$,

$$\frac{1}{x} I(x) = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{n(x)} \int_{(k-1)T}^{kT} f(t)\,dt + \int_{n(x)T}^{x} f(t)\,dt\right) = \frac{n(x)}{x}\int_0^T f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_{n(x)T}^{x} f(t)\,dt,$$

en utilisant la périodicité de f. Le premier terme tend vers la valeur moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Pour le second terme, il suffit de majorer (on intègre sur un segment plus petit qu'une période). La fonction f est continue et donc bornée sur $[0,T]$ (et donc sur $\mathbb{R}$). On note M un majorant de $|f|$. Alors

$$\left|\int_{n(x)T}^{x} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{n(x)T}^{x} |f(t)|\,dt \leqslant \int_{n(x)T}^{(n(x)+1)T} M\,dt = MT.$$

Par majoration, on obtient une limite nulle pour le second terme, ainsi que $\lim_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{x} = \frac{I(T)}{T}$.

Exercice 4.15

v1) on note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a $f(x)=F(ax)$. Par récurrence, on montre que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a notamment $f'(x)=af(ax)$, $f''(x)=a^2f'(ax)=a^3f(a^2x)$ et, par récurrence $f^{(n)}(x)=a^{1+2+\cdots+n}f(a^nx)$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0)=0$. On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre, ce qui donne

$$f(x)=0+\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Si on note $M_x=\sup_{t\in[0,x]}|f(t)|$, en utilisant la relation $|f^{(n+1)}(t)|\leqslant|f(a^{n+1}t)|\leqslant M_x$, on obtient $|f(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M_x$. Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, si bien que $f(x)=0$ - cela pour tout $x\in\mathbb{R}$.

v2) Plus simplement (mais ça ressemble beaucoup), on fixe $A>0$ et on note $M=\sup_{x\in[-A,A]}|f(x)|$. On a alors, pour $x\in[-A,A]$, $|f(x)|\leqslant\left|\int_0^{ax}M\,dt\right|=Ma|x|\leqslant M|x|$, puis en reportant dans la même équation, $|f(x)|\leqslant\left|\int_0^{ax}Mt\,dt\right|=M\frac{a^2x^2}{2}\leqslant\frac{Mx^2}{2}$. Par récurrence, on a $|f(x)|\leqslant M\frac{|x|^n}{n!}$. Pour tout $x\in[-A,A]$, on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ ce qui donne $f(x)=0$. La fonction f est nulle sur tout segment $[-A,A]$ donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.16

le terme dans la somme est petit, proche de $\frac{1}{k}$ lorsque k est grand (ce qui sera le cas puisque $k>n$). On note $v_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$ et on essaie d'étudier la différence u_n-v_n. On sait que $\lim_{n\to+\infty}v_n=\ln 2$ (somme de Riemann - on a $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$). On regroupe les termes proches et on est amené à étudier la différence $\sin^2x-x^2$ avec x compris entre $1/\sqrt{n+1}$ et $1/\sqrt{2n}$. On a

$$\sin^2x-x^2=(\sin x-x)(\sin x+x)\underset{x\to0}{\sim}-\frac{x^3}{6}.(2x)=-\frac{x^4}{3},$$

on en déduit que $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2}{x^4}=-\frac{1}{3}$. La fonction f définie par $f(x)=\frac{\sin^2x-x^2}{x^4}$ si $x\in]0,1]$ et $f(0)=-\frac{1}{3}$ est continue et donc bornée sur $[0,1]$. Il existe M tel que, pour tout $x\in]0,1]$, $\left|\sin^2x-x^2\right|\leqslant Mx^4$ et cette relation est vraie pour $x=0$.

remarque : on peut aussi utiliser la continuité de f en 0 afin d'obtenir $\alpha>0$ tel que, pour tout $x\in[0,\alpha]$, $|f(x)|\leqslant1$ (et alors travailler avec n de sorte que $\frac{1}{\sqrt{n}}<\alpha$. On peut également utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour comparer $\sin^2x$ à x^2, on encore obtenir - toujours avec la formule de Taylor - que $|\sin x-x|\leqslant\frac{|x|^3}{6}$ et ainsi

$$\left|\sin^2x-x^2\right|=|(\sin x-x)(\sin x+x)|\leqslant2|x|.\frac{|x|^3}{6}=\frac{x^4}{3}$$

Ça laisse pas mal de façons différentes pour obtenir ces inégalités.

Une fois que cela est fait, on a (on peut remplacer le terme $\frac{1}{3}$ par 1 ou par M selon ce qu'on a fait avant)

$$|u_n-v_n|\leqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{3k^2}\leqslant\frac{n}{3n^2}=\frac{1}{3n}$$

cela donne $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$ et $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ln2$.

Exercice 4.17

On remarque qu'il y a deux facteurs bien différents : le terme en $\sin\left(\frac{k}{n}\right)$ qui prend des valeurs entre 0 et $\sin 1$ et celui en $\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ qui lui est de plus en plus petit ($k/n^2\leqslant1/n$) et par conséquent proche de $\frac{k}{n^2}$. On s'intéresse alors à

$$v_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n},$$

somme de Riemann attachée à la fonction continue sur $[0,1]$, $x\mapsto x\sin x$. On a ainsi $\lim_{n\to+\infty}v_n=\int_0^1x\sin x\,dx$. On montrer alors que v_n-u_n est de limite nulle. On a besoin de controler la différence $\sin x-x$ pour $x\in[0,1]$. Avec la formule de Riemann (reste intégrale), on a

$$\sin x=x+\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2(-\cos t)\,dt,$$

et $|\sin x-x|\leqslant\frac{x^3}{2}$ (on peut même obtenir $x^3/6$ en majorant moins grossièrement). On en déduit

$$|u_n-v_n|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\frac{k^3}{n^6}\leqslant\frac{1}{2}n.\frac{1}{n^3}=\frac{1}{2n^2}.$$

Finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x\sin x\,dx$.

Exercice 4.18

1. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = M$. Par continuité, il existe $[A,B] \subset [a,b]$ contenant x_0 et avec $B > A$ tel que $f(x) \geqslant M - \varepsilon$ si $x \in [A,B]$. On a alors
$$\int_a^b f(t)^n\,dt \geqslant \int_A^B f(t)^n\,dt \geqslant (B-A)(M-\varepsilon)^n.$$
on a le résultat avec$\alpha = B - A > 0$.
2. Soit $\varepsilon \in]0,M[$. On utilise α comme dans la question précédente et on a alors
$$\alpha(M-\varepsilon)^n \leqslant \int_a^b f(t)^n\,dt \leqslant (b-a)M^n$$
puis
$$\alpha^{1/n}(M-\varepsilon) \leqslant \left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} \leqslant (b-a)^{1/n}M.$$
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \alpha^{1/n}(M-\varepsilon) = M-\varepsilon$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, $M - 2\varepsilon \leqslant \alpha^{1/n}(M-\varepsilon)$. De même il existe n_2 tel que, pour $n \geqslant n_2$, $(b-a)^{1/n}M \leqslant M + 2\varepsilon$. On déduit qu'il existe $n_0 = \max(n_1, n_2)$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,
$$M - 2\varepsilon \leqslant \left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} \leqslant M + 2\varepsilon,$$
On a bien obtenu $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} = M$.

Exercice 4.19

1. Si la fonction g existe, alors $f'(t) = g'(t)f(t)$ et $g'(t) = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$. On a donc, si $t_0 \in I$, $g(t) = g(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)}\,du$. Réciproquement, notons $g : t \mapsto \alpha + \displaystyle\int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)}\,du$. On choisit α de sorte que $g(t_0) = \alpha$ vérifie $f(t_0) = \exp(\alpha)$ (la fonction est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$). On considère $h = f.\exp(-g)$. On a $h' = (f' - fg')\exp(-g) = 0$ car $g' = f'/f$. Ainsi h est constante et $h(t_0) = 1$ donc, pour tout $t \in I$, $h(t) = f(t)\exp(-g(t)) = 1$ et $f(t) = \exp(g(t))$.
2. on reprend les calculs précédents. On a $g(2\pi) = g(0) + \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du$. Or $f(2\pi) = f(0)$, ce qui donne $\exp(g(2\pi) - g(0)) = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = 2ik\pi$.

Exercice 4.20

1. On peut effectuer le changement de variable « $x = \lambda t$ ». Cela donne
$$\int_0^u |\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda u} |\sin(x)|\,dx = u\frac{1}{\lambda u}\int_0^{\lambda u} |\sin(x)|\,dx.$$
La fonction $x \mapsto |\sin x|$ est π périodique. On montre (voir autre exercice) que
$$\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\int_0^X |\sin x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}.$$
Finalement, $\lim_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_0^u |\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}u$. Par différence, pour tout $\alpha, \beta > 0$,
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\alpha^\beta |\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}(\beta - \alpha).$$
2. On commence par traiter le cas d'une focntion en escalier puis on étend le résultat aux fonctions continues par morceaux.
$\to$ soit f en escalier sur $[a,b]$ et $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ une subdivision associée avec $f = m_i$ sur $]a_i, a_{i+1}[$. On a
$$\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} m_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\sin(\lambda t)|\,dt.$$
Par linéarité, $\lim_{\lambda\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} m_i(a_{i+1} - a_i) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt.$

→ Soit $\varepsilon > 0$ et g une fonction en escaliers telle que $|f-g| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ (le dénominateur apparaît à la fin des majorations... on l'a modifié a posteriori). On a trois quantités qui sont « proches » : les intégrales de f et g, celles multipliées par $|\sin|$ et le lien entre la fonction de λ pour g et sa limite en fonction de g. On va donc faire intervenir ces trois différences :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
&\quad\leqslant \left|\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt\right| \\
&\qquad + \left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| + \left|\frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| \\
&\quad\leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)||\sin(\lambda t)|\,dt \\
&\qquad + \left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| + \frac{2}{\pi}\int_a^b |f(t)-g(t)||\sin(\lambda t)|\,dt \\
&\quad\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| + \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\lambda \geqslant A$, on ait

$$\left|\int_a^b g(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b g(t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

et ainsi, pour tout $\lambda > A$,

$$\left|\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,dt - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

On a bien prouvé que le résultat subsite si f est continue par morceaux sur $[a,b]$.