

CHAPITRE 3 - DL, ÉQUIVALENTS

Exercice 3.1

On détermine la limite de f/g en $+\infty$. Pour $x > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln^\alpha x}{x^{\beta-\gamma}}$.

- si $\gamma > \beta$, alors $g(x) = o_\infty(f(x))$,
- si $\gamma < \beta$, alors $f(x) = o_\infty(g(x))$,
- si $\beta = \gamma$ et $\alpha > 0$, alors $g(x) = o_\infty(f(x))$,
- si $\beta = \gamma$ et $\alpha < 0$, alors $f(x) = o_\infty(g(x))$,
- si $\beta = \gamma$ et $\alpha = 0$, $f = g$.

Exercice 3.2

- a) $\frac{(1-\cos x) \arcsin x}{x \tan^2 x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2/2 \cdot x}{x \cdot x^2} = \frac{1}{2}$.
- b) $(\ln x)^{1/x} = \exp(\frac{1}{x} \ln \ln(x))$. On a $\ln(u) = o_{+\infty}(u)$ donc $\ln(\ln x) = o_{+\infty}(\ln x) = o_{+\infty}(x)$. Finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/x} = 1$.
- c) $(\sin x)^x - 1 = \exp(x \ln \sin x) - 1$. Or $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ de limite nulle donc $\ln \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x$ et $x \ln(\sin x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. En utilisant $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, on en déduit que $(\sin x)^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln x$. De même pour le dénominateur. La limite est 1.
- d) On pose $x = 1 + h$. Cela donne $\frac{(1+h) \ln(1+h)}{2h + h^2} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.3

On note $f(x) = \frac{a}{\sin(x)} - \frac{b}{\ln(1-x)}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a \ln(1-x) - b \sin x}{\sin(x) \ln(1-x)} \\ &= \frac{a(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - b(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{\sin(x) \ln(1-x)} \\ &= \frac{-(a+b)x - \frac{a}{2}x^2 + o(x^2)}{\sin(x) \ln(1-x)} \end{aligned}$$

Si $a + b \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{(a+b)x}{-x^2} = \frac{a+b}{x}$. Si $b = -a$ et $a \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-(a/2)x^2}{-x^2} = a/2$. Sinon $a = b = 0$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 0$.

Exercice 3.4

- a) $-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$.
- b) $\ln 2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^5)$.
- c) $e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^3)$.
- d) $1 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$.
- e) $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$.
- f) $-\ln x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o(1/x^2)$.

Exercice 3.5

- a) $u_n \sim \frac{n^2}{3n^2} = 1/3$
- b) $u_n \sim \frac{3^n}{3^n} = 1$
- c) $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{1}{2n}$ et $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$
- d) $u_n \sim 2 \frac{\ln n}{n}$
- e) $u_n \sim \frac{n!}{3^n}$
- f) $u_n = \sqrt{\ln(1+1/n)} \sim \sqrt{1/n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$
- g) puisque $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ de limite nulle, on a $u_n \sim \ln \frac{1}{n} = -\ln n$
- h) $u_n = n^{\frac{1}{n}} \left(1 - n^{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}\right) = e^{\frac{\ln n}{n}} \left(1 - \exp\left(-\frac{\ln n}{n(n+1)}\right)\right)$. En utilisant la relation $e^u - 1 \sim u$ en 0, on obtient $u_n \sim \frac{\ln n}{n(n+1)} \sim \frac{\ln n}{n^2}$

i) $\sqrt{n^2 + n + 1} = n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n = n \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{8} \frac{1}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)$, ce qui donne $\sqrt{n^2 + n + 1} = n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + o \left(\frac{1}{n} \right)$. On a alors

$$u_n = \cos \left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) = (-1)^n \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) = (-1)^{n+1} \sin \left(\frac{3\pi}{8n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

donc $u_n \sim (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n}$.

j) Si $a \in]0, 1]$, $u_n \sim \frac{n^a}{n^{2a}} = \frac{1}{n^a}$ et si $a > 1$, $u_n \sim \frac{1}{a^n}$.

Exercice 3.8

La fonction est évicemment de classe \mathcal{C}^1 sur $I \setminus \{0\}$.

→ On commence par la continuité : $f(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3/6}{x \times x} = -\frac{x}{6}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et que f est continue en 0.

→ On peut étudier la dérivabilité en 0 (pas vraiment utile) : avec le calcul précédent, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6},$$

ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{6}$. Cela ne garantit pas la continuité de f' en 0.

→ On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$. On cherche la limite en 0. Le dénominateur est équivalent à x^4 en 0. On a

$$\begin{aligned} x^2 \cos x - \sin^2 x &= x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \right)^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{2x^4}{6} + O(x^6) = -\frac{1}{6}x^4 + O(x^6) \end{aligned}$$

On a alors $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{6} = f'(0)$ et la continuité de f' . Finalement f est \mathcal{C}^1 sur I

remarque : on aurait pu se passer de l'étude de la dérivabilité en 0 en utilisant le théorème de prolongement du caractère \mathcal{C}^1 : si f est continue sur $[a, b]$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$ et si f' admet une limite finie ℓ en a alors f est dérivable sur $[a, b]$ avec $f'(a) = \ell$ et f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. **Attention** : ce n'est pas un théorème de prolongement \mathcal{C}^1 de f puisqu'il n'y a pas à prolonger f - elle admet déjà une valeur en a .

Exercice 3.9

Soit $u = \arccos(x)$ avec x proche de 1 (par valeurs inférieures). On a $\lim_{x \rightarrow 1} \arccos(x) = 0$ et $\cos(u) = x = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Ainsi $2(1 - x) = u^2 + o(u^2)$, ce qui donne $2(1 - x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} u^2$. Puisque $u > 0$, cela donne $u \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sqrt{2(1 - x)}$.

Exercice 3.10

On n'a pas de théorème qui permet d'intégrer entre 2 bornes un DL. On note $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ (F est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ qui s'annule en 0 - elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}). On a $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$ et $F(0) = 0$. On permet obtenir alors le DL de F en 0 : $F(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$. On a alors

$$f(x) = F(x^2) - F(x) = (x^2 + O(x^6)) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) = -x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Exercice 3.11

La fonction f est \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$, sa dérivée est $f' : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$ qui est strictement positive. La fonction f réalise une bijection strictement croissante de $] -1, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$. La fonction admet une réciproque f^{-1} sur \mathbb{R} qui est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (et $f^{-1}(0) = 0$ puisque $f(0) = 0$) - cela garantit l'existence d'un DL de f^{-1} en 0 à tout ordre. On écrit $f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + o(y^3)$. On a $f^{-1}(f(x)) = 0$ pour tout $x \in] -1, 1[$ (par exemple). Or $f(x) = x + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Par composition (on a bien $f(x)$ de limite nulle lorsque x tend vers 0), on peut substituer y par le DL de $f(x)$ en 0 (on a alors $y^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 8x^3$ et ainsi le terme en $o(y^3)$ est un terme en $o(x^3)$). On développe, regroupe et on utilise l'unicité du DL pour obtenir les équations (termes en x, x^2 et x^3 dans le DL de $f^{-1}(f(x))$) :

$$2a = 1, 4b - \frac{a}{2} = 0 \text{ et } 8c - 2b + \frac{a}{3} = 0.$$

On trouve $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}y^2 - \frac{1}{192}y^3 + o(y^3)$.

Exercice 3.12

→ L'équation équivaut à $\tan(x) - \frac{1}{x} = 0$. La fonction $x \mapsto \tan(x) - \frac{1}{x}$ est continue, strictement croissante sur I_n avec des limites infinies aux bornes de I_n . Par bijection, l'équation admet une unique solution sur I_n .

→ On a $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$, et, par encadrement, $\frac{x_n}{n\pi}$ tend vers 1. On a donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$.

→ On écrit $x_n = n\pi + y_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$. On reporte dans l'équation, ce qui donne

$$1 = (n\pi + y_n) \tan(n\pi + y_n) = (n\pi + y_n) \tan(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi y_n.$$

On en déduit $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$.

→ De même $x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n$ avec $z_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(y_n)$, soit $z_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\frac{1}{n})$. On reporte de nouveau et on effectue un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} 1 &= (n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n) \tan(\frac{1}{n\pi} + z_n) = (n\pi + \frac{1}{n\pi} + z_n) (\frac{1}{n\pi} + z_n + \frac{1}{3\pi^3 n^3} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\frac{1}{n^3})) \\ &= 1 + n\pi z_n + \frac{1}{3\pi^2 n^2} + \frac{1}{n^2 \pi^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

d'où

$$n\pi z_n = -\frac{4}{3n^2 \pi^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\frac{1}{n^2}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^2 \pi^2}.$$

On en déduit que $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{4}{3n^3 \pi^3}$, et

$$x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{4}{3n^3 \pi^3} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\frac{1}{n^3}).$$

Exercice 3.13

1. Soit $Q(x) = x^2 - 2tx + 1$. Son discriminant est $\Delta = 4(t^2 - 1)$. Lorsque $t \in]0, 1[$, Q reste strictement positif et $\mathcal{D}_{f_t} = \mathbb{R}$. Si $t = 1$, $\mathcal{D}_{f_t} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Lorsque $t > 1$, Q admet deux racines strictement positives $x_1 = t - \sqrt{t^2 - 1} < x_2 = t + \sqrt{t^2 - 1}$ (la somme est $2t > 0$, le produit 1). Alors $\mathcal{D}_{f_t} = \mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$.
2. Dans toutes les situations, il existe $\alpha > 0$ tel que f_t est définie et est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\alpha, \alpha[$. La fonction admet alors un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. On note $u = x^2 - 2xt = x(x - 2t)$. Cette quantité tend vers 0 lorsque x tend vers 0. De plus $u \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$f_t(x) = (1 + u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^n \alpha_k u^k + \underset{x \rightarrow 0}{o}(u^n) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k (x - 2t)^k + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^n).$$

En développant, le terme u^k donne des termes en x^m pour $m \in \llbracket k; 2k \rrbracket$, avec des coefficients polynomiaux en t . En regroupant les termes de même degré, on obtient une expression comme demandée.

3. On cherche une expression permettant d'écrire l'unicité des coefficients d'un développement limité. On remarque que

$$f'_t(x) = \frac{t - x}{(1 - 2xt + x^2)^{3/2}} = \frac{t - x}{1 - 2xt + t^2} f_t(x),$$

ce qui donne la relation $(1 - 2xt + x^2) f'_t(x) = (t - x) f_t(x)$ (au voisinage de 0). Soit $k \geq 1$. On écrit un développement limité à un ordre suffisant des deux cotés (afin d'avoir un ordre final d'au moins $k + 1$), et on regarde les termes en x^k . Par unicité, on obtient

$$(k + 1)P_{k+1}(t) - 2t k P_k(t) + (k - 1)P_{k-1}(t) = t P_k(t) - P_{k-1}(t).$$

On réécrit cela en

$$(k + 1)P_{k+1}(t) = (2k + 1)t P_k(t) - k P_{k-1}(t).$$

Cela donne une relation de récurrence entre les polynômes P_k , ce qui permet de les calculer facilement (on montre notamment que P_k est de degré k).