

# 2 DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

## I. GÉNÉRALITÉS

### FACTORISATION D'UN POLYNÔME

#### Proposition 1 (Factorisations de polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ )

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  de degré  $n \geq 1$ . Alors  $P$  se factorise de façon unique sous la forme

$$P = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_p)^{\alpha_p},$$

où les complexes  $a_1, \dots, a_p$  sont deux à deux distincts et les exposants  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont des entiers naturels non nuls (tels que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$ ).

#### Proposition 2 (Factorisations de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ )

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  de degré  $n \geq 1$ . Alors  $P$  se factorise de façon unique sous la forme

$$P = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_p)^{\alpha_p} (X^2 - s_1 X + p_1)^{\beta_1} \cdots (X^2 - s_q X + p_q)^{\beta_q},$$

où

- les **réels**  $a_1, \dots, a_p$  sont deux à deux distincts.
- les facteurs **réels**  $X^2 - s_k X + p_k$  sont deux à deux distincts avec  $s_k^2 - 4p_k < 0$  pour  $k \in \llbracket 1; q \rrbracket$  (les facteurs sont irréductibles sur  $\mathbb{R}$ ).
- les exposants  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  et  $\beta_1, \dots, \beta_q$  sont des entiers naturels non nuls.

**Remarque :** les facteurs du second degré correspondent au produit de deux facteurs conjugués  $(X - z)(X - \bar{z})$ .

### PARTIE ENTIÈRE

#### Définition 1 (partie entière)

Soit  $A/B$  une fraction irréductible. On rappelle que la division euclidienne de  $A$  par  $B$  s'écrit  $A = BQ + R$  avec  $\deg R < \deg B$ . On appelle alors partie entière de la fraction rationnelle  $A/B$  le polynôme  $Q$ . On a alors l'écriture  $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ . On peut alors se ramener à l'étude de la décomposition d'une fraction sous la forme  $A/B$  avec  $\deg A < \deg B$ .

#### ⚠ Très important

⚡ Tout ce qui suit sur les décompositions suppose que le numérateur est de degré strictement inférieur à celui du dénominateur. La forme de la décomposition sera faussée si on ne se trouve pas dans cette situation. Il **faudra** donc systématiquement commencer par s'y ramener.

### DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES - CAS COMPLEXE

#### Proposition 3

On considère une fraction rationnelle irréductible  $F = A/B$  avec  $\deg A < \deg B$ . On factorise  $B$  sous la forme

$$B = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_p)^{\alpha_p}.$$

Il existe alors des complexes  $c_{ij}$  (uniques) tels que

$$F = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{c_{ij}}{(X - a_i)^j} \right).$$

En d'autres termes on décompose la fraction en fractions plus simples. Pour chaque facteur  $(X - a)^\alpha$  qui apparaît dans la factorisation de  $B$ , on voit apparaître les fractions  $\frac{1}{X - a}, \frac{1}{(X - a)^2}, \dots, \frac{1}{(X - a)^\alpha}$  dans la décomposition. Il n'y a plus qu'à déterminer les constantes devant ces fractions.

### DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES - CAS RÉEL

Le théorème est assez proche mais un peu plus compliqué. Avec les mêmes hypothèses,  $B$  se factorise dans  $\mathbb{R}[X]$  sous la forme

$$B = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1} \cdots (X - a_p)^{\alpha_p} (X^2 + b_1 X + c_1)^{\beta_1} \cdots (X^2 + b_q X + c_q)^{\beta_q},$$



→ pour chaque facteur  $(X - a)^\alpha$ , on écrit dans la décomposition les fractions

$$\frac{c_1}{X - a}, \frac{c_2}{(X - a)^2}, \dots, \frac{c_\alpha}{(X - a)^\alpha},$$

où  $c_i$  est un réel.

→ pour chaque facteur  $(X^2 + bX + c)^\beta$  (irréductible dans  $\mathbb{R}$ ), on fait apparaître les fractions

$$\frac{c_1 X + d_1}{X^2 + bX + c}, \frac{c_2 X + d_2}{(X^2 + bX + c)^2}, \dots, \frac{c_\beta X + d_\beta}{(X^2 + bX + c)^\beta},$$

où les constantes  $c_k$  et  $d_k$  sont réelles.

## II. TECHNIQUES DE DÉCOMPOSITION

On se donne une fraction rationnelle irréductible  $F = A/B$  et on cherche sa décomposition en éléments simples. On n'oubliera pas de vérifier que  $\deg A < \deg B$  et si ce n'est pas le cas, on commencera par effectuer la division euclidienne de  $A$  par  $B$  pour s'y ramener. On supposera être dans ce cas dans la suite de ce chapitre.

### CAS RÉEL

Pour une décomposition avec des facteurs réels irréductibles de degré 2 au dénominateur, de multiplicité 1, on a le choix entre chercher directement la décomposition en réel et la faire en complexe puis regrouper les termes conjugués (cela ne fonctionne pas si les exposants sont plus grand que 1).

### MÉTHODE DIRECTE

On sait sous quelle forme se décompose la fraction. On réduit les fractions intervenant dans la décomposition au même dénominateur et on identifie le numérateur obtenu avec celui de la fraction de départ. On obtient un système d'équations linéaires où les inconnues sont les constantes devant les éléments simples. Ce n'est à envisager sous cette forme que pour des cas très simples (et dans ces cas on utilisera de toute façon des méthodes plus rapides). En revanche cette méthode pourra/devra être utilisée lorsqu'on aura réussi à déterminer certains coefficients et qu'on a utilisé toutes les astuces connues. Il ne restera en général que très peu de coefficients à déterminer.

### TERMES DE PLUS HAUT EXPOSANT

#### Termes de degré 1

On considère un facteur  $(X - a)^\alpha$  dans la factorisation de  $B$  ( $\alpha$  maximum). On peut écrire  $B = (X - a)^\alpha C$  avec  $C(a) \neq 0$ . On multiplie alors les deux cotés de l'égalité (d'un côté la fraction, de l'autre la décomposition) par  $(X - a)^\alpha$  puis on remplace  $X$  par  $a$ . À gauche, il reste  $A(a)/C(a)$  et à droite le coefficient de  $1/(X - a)^\alpha$  (tous les autres termes ont au moins  $X - a$  en facteur). *Cela ne fonctionne que pour le terme de plus grand exposant.*

#### Exemple

On veut décomposer

$$F_1 = \frac{3X^2 + X - 2}{(X - 1)^2(X + 2)^2}.$$

La décomposition va s'écrire

$$F = \frac{a}{(X - 1)^2} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{(X + 2)^2} + \frac{d}{X + 2}.$$

Pour obtenir  $a$ , on multiplie  $F$  par  $(X - 1)^2$  puis on remplace  $X$  par 1 (en fait on « cache » le facteur  $(X - 1)^2$ ). Il vient

$$a = \left( \frac{3X^2 + X - 2}{(X + 2)^2} \right)_{|X=1} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

De même

$$c = \left( \frac{3X^2 + X - 2}{(X - 1)^2} \right)_{|X=-2} = \frac{8}{9}.$$

#### Termes de degré 2

Pour un facteur  $(X^2 + bX + c)^\beta$  (irréductible et de plus grand exposant), on peut réaliser la même opération et instancier  $X$  à l'une des racines de  $X^2 + bX + c$ . Puisque les constantes qui apparaissent dans la décomposition sont réelles (on part d'un polynôme à coefficients réels), on aura directement les deux constantes.

**Exemple**

On veut décomposer

$$F_2 = \frac{3X+1}{(X+1)^2(X^2+X+1)}.$$

On sait que la décomposition va s'écrire

$$F_2 = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}.$$

On multiplie par  $X^2+X+1$  puis on évalue en  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  :

$$\left( \frac{3X+1}{(j+1)^2} \right)_{X=j} = cj+d.$$

Or  $1/(j+1)^2 = 1/(-j^2)^2 = 1/j^4 = j^2$  (on utilise  $j^3 = 1$  et  $1+j+j^2 = 0$ ). Il vient

$$cj+d = (3j+1)j^2 = 3j^3+j^2 = 3+j^2.$$

Le partie réelle donne  $-\frac{c}{2} + d = 3 - \frac{1}{2}$  la partie imaginaire  $c\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . On a donc  $c = -1$  puis  $d = 2$ .

**COMPORTEMENT EN L'INFINI**

Une astuce supplémentaire consiste à multiplier chaque coté par  $X$  puis faire tendre  $X$  vers  $+\infty$ . On obtient alors parfois une nouvelle équation.

**PARITÉ**

Si la fraction  $F$  est paire ou impaire ( $F(-X) = \pm F(X)$ ), on pourra utiliser l'unicité de la décomposition pour trouver de nouvelles relations

**Exemple**

Soit  $F_3 = \frac{1}{(X^4+1)} = \frac{1}{(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)}$ . On remarque que  $F_3(X) = F_3(-X)$ . La décomposition de  $F_3$  va s'écrire

$$F_3 = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}.$$

la décomposition de  $F_3(-X)$  va alors être (on remplace au dessus)

$$\begin{aligned} F_3(-X) &= \frac{-aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{-cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1} \\ &= \frac{-cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{-aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} \\ F_3(X) &= \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1} \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant l'unicité des coefficients, on obtient les relations  $a = -c$  et  $b = d$  (deux fois).

**Remarque :** La factorisation du numérateur vient de  $X^4+1 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$ .

**III. EXERCICES****Exercice 1**

Refaire et terminer les décompositions des fractions  $F_1, F_2$  et  $F_3$

**Exercice 2**

Décomposer en éléments simples les fractions suivantes

a)  $\frac{1}{X(X+1)(X+2)}.$

d)  $\frac{2X+1}{(X^2-X)^2}.$

b)  $\frac{1}{X(X^2+1)}.$

e)  $\frac{X^4-1}{X^2(X+1)}.$

c)  $\frac{1}{X^3+1}.$

f)  $\frac{X^4}{(X+1)(X^2-1)}.$

**Exercice 3 (Formule générale)**



1. Soit  $F = \frac{P(X)}{Q(X)}$  irréductible avec  $a$  racine simple de  $Q$  (et  $\deg P < \deg Q$ ). Justifier que le coefficient du terme  $\frac{1}{X-a}$  dans la décomposition en éléments simples est  $\frac{P(a)}{Q'(a)}$ .
  2. Généraliser la relation lorsque  $a$  est racine de multiplicité  $k$  de  $Q$ .
  3. Déterminer la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{X^n-1}$  où  $n$  est un entier au moins égal à 2.
- 

**Exercice 4**

---

Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  scindé sur  $\mathbb{R}$  (avec  $n \geq 2$ ). Justifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x)P''(x) \leq P'^2(x)$ .