CHAPITRE 1 - NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.1

On a $|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = |z|^2 + [z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$ et $|z-z'|^2 = |z|^2 + [z'|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$. On somme, ce qui donne le résultat.

Exercice 1.2

On exclut les cas particuliers où l'un des deux est nul (le résultat est vrai). En élevant au carré, la relation équivaut à $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'|$ (tout est positif). En utilisant $|a|^2 = a\overline{a}$, on obtient

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}).$$

On a $2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leqslant 2|z\overline{z'}| = 2|z||z'|$ et ainsi $|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|.|z'| = (|z|+|z'|)^2$ (on simplifie les carrés car tout est positif).

On a l'égalité si, et seulement si $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |zz'|$. Puisque $|z'| = |\overline{z'})|$, l'égalité est équivalente à $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}|$, ce qui est vrai si, et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$. On note $k \in \mathbb{R}^+$ ce réel. Puisque z' est non nul, $z\overline{z'} = k \Leftrightarrow zz'\overline{z'} = kz'$ et $z = \dfrac{k}{|z'|^2}z'$ (et même puisque $k = |zz'|$, on a $z = \dfrac{|z|}{|z'|}z'$).

Exercice 1.3

- → On a $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n = 2^{n/2}e^{in\pi/4}$, d'où le module vaut $2^{n/2}$ et un argument $n\pi/4$.
- → $1+e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(2\cos(\theta/2))$. On a $\left|1+e^{i\theta}\right| = 2|cos(\theta/2)|$. Lorsque ce module est strictement positif, un argument est $\theta/2$, lorsqu'il est strictement négatif, $\pi+\theta/2$.
- → De même $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \dfrac{e^{i\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\dfrac{2\cos(\theta/2)}{-2i\sin(\theta/2)} = i\mathrm{cotan}(\theta/2)$. Le module vaut 1, un argument est $\pm\pi/2$ suivant le signe de $\mathrm{cotan}(\theta/2)$ (tout cela lorsque $e^{i\theta} \neq 1$).

Exercice 1.4

On suppose $n \neq 0$. On factorise $z^2+1 = (z+i)(z-i)$, ce qui donne l'équation équivalente

$$(z+i)^n\left((z-i)^n - (z+i)^n\right) = 0.$$

On a la solution $z = -i$. Pour $z \neq -i$, l'équation équivaut à $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = 1$. Cela équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{z-i}{z+i} = e^{2ik\pi/n}$. Pour k multiple de n, il n'y a pas de solution sinon

$$z = i\frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}} = i\frac{2\cos(k\pi/n)}{-2i\sin(k\pi/n)} = -\mathrm{cotan}(k\pi/n).$$

Exercice 1.5

On effectue une récurrence sur n le nombre de termes de la somme. Soit $\mathscr{P}(n)$: « si $z_1,\ldots,z_n$ sont des complexes tels que $\left|\sum_{i=1}^n |z_i|\right| = \sum_{i=1}^n |z_i|$ alors il existe $z \in \mathbb{C}$ et des réels positifs $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que $z_i = \lambda_i z$ ».

- → La proposition est vraie pour $n = 2$.
- → Soit $n \geqslant 2$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie jusqu'au rang n. On considère $n+1$ complexes non nuls (sinon on se ramène à un nombre de termes inférieur) vérifiant l'égalité. On a alors

$$\begin{aligned}|z_1|+\ldots+|z_n|+|z_{n+1}| &= |(z_1+\ldots+z_n)+z_{n+1}| \leqslant |z_1+\ldots+z_n|+|z_{n+1}| \\ &\leqslant |z_1|+\ldots+|z_n|+|z_{n+1}|,\end{aligned}$$

  et ainsi, d'une part $|z_1+\ldots+z_n| = |z_1|+\ldots+|z_n|$ et d'autre part z_{n+1} et $z_1+\ldots+z_n$ sont sur la même demi-droite complexe. On applique la propriété de récurrence qui donne $z_i = \lambda_i z$ pour $i = 1,\ldots,n$. Alors $z_1+\ldots+z_n = (\lambda_1+\ldots+\lambda_n)z$ avec $\lambda = \lambda_1+\ldots+\lambda_n > 0$ (tous strictement positifs). Puisque z_{n+1} est sur la même demi droite, on a $z_{n+1} = \lambda_{n+1}z$.
- → Par récurrence, le résultat est vrai pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 1.6

- → On peut le faire analytiquement : on a $|z| = 1$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. La seconde relation $|z+1| = 1$ donne $|1+e^{i\theta}| = 1$. Or $1+e^{i\theta} = 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)$. L'équation équivaut donc à $|\cos(\theta/2)| = 1/2$ ce qui équivaut à l'existence d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta/2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\theta/2 = \pm 2\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Finalement, cela équivaut à $\theta = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ et $z = j$ ou $z = \overline{j}$.
- → On le fait plus simplement géométriquement : les complexes sont ceux qui sont à l'intersection des cercles $C(O,1)$ et $C(A,1)$ où A est le point d'affixe -1. On retrouve les points intersection du cercle $C(O,1)$ et de la médiatrice de $[OA]$ (droite d'équation $x = -1/2$). Cela redonne j et $\overline{j}$.

Exercice 1.7

On a $a = \frac{1}{2}(a+b+a-b)$, d'où $|a| \leqslant \frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)$. De même avec b. Cela donne l'inégalité. Pour avoir le cas d'égalité, il faut que les deux majorations soient des égalités. La première donne $a+b$ et $a-b$ positivement liés, la seconde $a+b$ et $b-a$ positivement liés. Si $a+b \neq 0$, cela donne $a-b$ et $b-a$ positivement liés, ce qui n'est possible que si $a-b = 0$. Les cas d'égalités sont $a = \pm b$.

Exercice 1.8

On écrit $a=e^{i\alpha}$, $b=e^{i\beta}$ et $c=e^{i\gamma}$ (avec $\alpha\neq\gamma[2\pi]$). La quantité à calculer vaut

$$\frac{e^{i\alpha}(e^{i\beta}-e^{i\gamma})^2}{e^{i\beta}(e^{i\alpha}-e^{i\gamma})^2}=\frac{e^{i\alpha}\left(e^{i(\beta+\gamma)/2}2i\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})\right)^2}{e^{i\beta}\left(e^{i(\alpha+\gamma)/2}2i\sin(\frac{\alpha-\gamma}{2})\right)^2}=\frac{e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}}{e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}}\frac{\sin^2(\frac{\beta-\gamma}{2})}{\sin^2(\frac{\alpha-\gamma}{2})}=\frac{\sin^2(\frac{\beta-\gamma}{2})}{\sin^2(\frac{\alpha-\gamma}{2})}$$

Exercice 1.9

1. On développe $(1+1)^n=U_n+V_n=2^n$ et $(1-1)^n=0=U_n-V_n$ ce qui donne $U_n=V_n=2^{n-1}$ si $n\geqslant 1$.
2. On utilise de nouveau la formule du binôme. Le principe est d'utiliser $j=e^{2i\pi/3}$ avec $j^3=1$ (pour faire apparaître une période de 3 dans les calculs) : $U_n+V_n+W_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$ avec également $(1+j)^n=U_n+jV_n+j^2W_n$ et $(1+j^2)^n=U_n+j^2V_n+jW_n$. Cela donne le système (avec $1+j=-j^2=e^{i\pi/3}$ et $1+j^2=-j=e^{-i\pi/3}$) :

$$\left\{\begin{array}{ccc}U_n+V_n+W_n&=&2^n\\U_n+jV_n+j^2W_n&=&e^{in\pi/3}\\U_n+j^2V_n+jW_n&=&e^{-in\pi/3}\end{array}\right.$$

On obtient $U_n=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3})\right)$, ainsi que (en faisant $L_1+j^2L_2+jL_3$), $V_n=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$ et $W_n=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$.

Exercice 1.10

On note S_n cette somme. On a

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\omega^{jk}\right)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k\right)$$

Si $\omega^j=1$ (c'est-Ã -dire $j=0$ ou $j=n$), la somme interne vaut n, sinon elle vaut $\frac{1-\omega^{jn}}{1-\omega^j}=0$. Il ne reste que les deux termes extrêmes. On a $S_n=2n$.

Exercice 1.11

1. → on peut calculer directement :

$$\begin{aligned}D_n(x)&=e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}e^{ikx}=e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{-inx}}{e^{ix/2}}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{-2i\sin(x/2)}\\&=\frac{e^{-i(n+1/2)x}-e^{i(n+1/2)x}}{-2i\sin(x/2)}=\frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.\end{aligned}$$

→ on peut simplifier en $D_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}2\cos(kx)$ (c'est parfois donné sous cette forme). À l'aide de $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$, on a alors

$$\begin{aligned}D_n(x)\sin(x/2)&=\sin(x/2)\sum_{k=1}^{n}(\sin(k+1/2)x-\sin(k-1/2)x)\\&=\sin(x/2)+\sin((n+1/2)x)-\sin(x/2)=\sin(n+1/2)x\end{aligned}$$

→ C'est reparti... on passe par $\sum_{k=0}^{n}e^{i(k+1/2)x}$ dont la partie imaginaire est la somme des sinus :

$$\sum_{k=0}^{n}e^{i(k+1/2)x}=e^{ix/2}\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}=e^{i(n+1)x/2}\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}$$

Finalement $S_n(x)=\frac{\sin^2((n+1)x/2)}{\sin^2(x/2)}$.

Exercice 1.12

Deux solutions :

1. On note A,B et C les points d'affixe a,b et c. Le centre du cercle circonscrit à ABC est O (complexes de module 1), et le centre de gravité également. Ainsi le triangle est équilatéral. On a alors $b=aj$ et $c=aj^2$ (ou $c=aj$ et $b=aj^2$). Dans la première situation $a^2+b^2+c^2=a^2(1+j^2+j)=0$ (idem sinon).
2. On a $(a+b+c)^2=0=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$. On cherche à évaluer la valeur inconnue. On a $|a|^2=1=a\bar{a}$, d'où $\bar{a}=1/a$. Alors $\overline{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\overline{bc+ac+ab}}{abc}=0$. En conjuguant l'expression, on obtient $ab+ac+bc=0$.

Exercice 1.13

Plusieurs solutions possibles

→ On résout le système, ce qui donne $c=-(a+b)$ et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$. Cette dernière équation devient $(a+b)^2=ab$ ou $a^2+ab+b^2=0=b^2(t^2+t+1)$ où $t=\frac{a}{b}$. On en déduit que $a=jb$ ou $a=j^2b$. Si $a=jb$, alors $c=j^2b$. Les trois complexes sont de même module et on a $b=ja$, $c=j^2a$. Sinon $b=j^2a$ et $c=ja$.

→ L'équation $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ équivaut à $bc+ac+ab=0$. Lorsqu'on développe $P=(X-a)(X-b)(X-c)$, on obtient

$$P=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$$

Ainsi a, b et c vérifient les conditions si et seulement s'ils sont les trois racines de X^3-abc. En notant $k^3=abc$, les complexes sont k, jk et j^2k.

Exercice 1.14

→ On note $z_k=1-e^{2ik\pi/n}$. Alors $1-z_k=e^{2ik\pi/n}$ et $(1-z_k)^n=1$. On note $P_n=(1-X)^n-1$. Les racines de P_n sont 0 et les z_k. Soit $Q_n=P_n/X$. Ce polynôme est de degré $n-1$ et ses racines sont $z_1,\dots,z_{n-1}$. On a $Q_n=(-1)^nX^{n-1}+\dots-n$. Le produit des racines vaut $(-1)^{n-1}\frac{-n}{(-1)^n}=n$.

→ On considère les polynômes $P=\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-e^{2ik\pi/n}\right)$ et $Q=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{2ik\pi/n}\right)$. D'après le cours, on a $Q=X^n-1$. On aussi $Q=(X-1)P$. Cela donne $P=\frac{X^n-1}{X-1}=\sum_{k=0}^{n-1}X^k$. Finalement on cherche $P(1)=n$.