I] Barycentres

avec des flèches sur les vecteurs

Quelques généralités pour présenter les barycentres en mathématiques
→ la présentation se fait essentiellement dans le plan usuel ($\mathbb{R}^2$) ou l'espace ($\mathbb{R}^3$)
→ on généralise ensuite dans un $\mathbb{R}$ev quelconque
le but est d'arriver à la notion de "combinaison linéaire convexe" pour la partie topologie (II/ Ensembles convexes)
Cette partie n'est pas fondamentale par rapport à ce qui est ensuite demandé mais elle permet de comprendre ce qu'on fait par la suite

1/ Définition du barycentre - Fonction de Leibniz

a/ $E = \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) - aspect géométrique usuel

. On a un système de points pondérés, c'est-à-dire $((A_i, m_i))_{i\in [\![1,n]\!]}$ où $A_i \in E$ → point, $m_i \in \mathbb{R}$ → poids
- pour tout $M \in E$, on note

$$\underbrace{f(M) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{MA_i}}_{\text{fonction de Leibniz}} \quad \text{et} \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i \hookrightarrow \text{masse totale}$$

remarque :
* si $A, B \in E$
$B - A = \vec{OB} - \vec{OA} = \overrightarrow{AB}$
* $M' = M + \vec{u}$
signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Proposition principale : si M et N sont dans E

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA_i}) = \boxed{f(N) + m \times \overrightarrow{MN} = f(M)}$$

1^er cas : $m = 0$ - la fonction est constante) on n'étudiera pas plus ce cas
2^ème cas : $m \neq 0$ - la fonction est bijective.

démo de bijective :
on peut fixer $N = O$ l'origine, ainsi $f(M) = f(O) + m\,\overrightarrow{MO}$ - on note $\Omega = f(O)$
si P est dans E, $f(M) = P \iff \Omega + m\,\overrightarrow{MO} = P$
$\iff m\,\overrightarrow{OM} = \Omega - P = \overrightarrow{P\Omega}$
$\iff \overrightarrow{OM} = \frac{1}{m}\overrightarrow{P\Omega}$) donne l'unique M

notamment, il existe un unique point G / $f(G) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

* si G vérifie $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = f(G) = \vec{0}$ alors la relation $f(M) = f(N) + m\,\overrightarrow{MN}$
donne avec $N = G$, $f(M) = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{MA_i} = m\,\overrightarrow{MG}$ pour tout $M \in E$
* si G vérifie, $\forall M \in E$, $f(M) = m\,\overrightarrow{MG}$ alors notamment $f(G) = \vec{0}$

équivalence entre les deux relations de la définition qui suit

On a donc équivalence, pour un point $G \in E$ entre
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \iff \forall M \in E,\ \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{MA_i} = m\,\overrightarrow{MG}$$

Important

Définition (barycentre)

soit $(A_i, m_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de points pondérés avec $m = \sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$

alors il existe un unique point G tel que i/ $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

ii/ $\forall \Pi \in E$, $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\Pi A_i} = m \times \overrightarrow{\Pi G}$

la seconde formule peut être appliquée avec différents Π, notamment en O ce qui donne :

$$m \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}$$

permet notamment d'obtenir les coordonnées de G

Elle permet également de condenser toute une combinaison linéaire de vecteurs en un seul (important pour la suite)

b/ E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel quelconque.

si $(a_i, m_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système de points pondérés $(a_i \in E, m_i \in \mathbb{R})$

avec $m = \sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$, on définit g le barycentre de ce système de points pondérés par

$$m\, g = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i \quad \text{ou} \quad \boxed{g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i a_i}$$

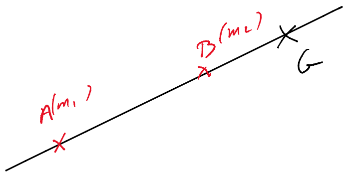
définition du barycentre dans E

2/ Exemples : 2 et 3 points dans $E = \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$, voire même E quelconque)

$*$ on se donne (A, m_1) et (B, m_2) avec $\overbrace{m_1 + m_2}^{m} \neq 0$ et G le barycentre.

on a, pour tout $\Pi \in E$, $(m_1 + m_2)\overrightarrow{\Pi G} = m_1 \overrightarrow{\Pi A} + m_2 \overrightarrow{\Pi B}$

notamment $(\Pi = A)$: $\overrightarrow{AG} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{AB}$: le barycentre est sur (AB)



$\to$ si $m_1 = 0$, $m_2 \neq 0$: $G = B$

$\to$ si $m_1 \neq 0$, $m_2 = 0$. $G = A$

$\to$ si m_1 et m_2 sont ≥ 0 alors $\frac{m_2}{m_1 + m_2} \in [0,1]$ et $G \in [AB]$

(si $m_1 = m_2$ alors G est le milieu de $[AB]$)

réciproquement : . si $\Pi \in (AB)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R} / \overrightarrow{A\Pi} = \lambda \overrightarrow{AB} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)+\lambda} \overrightarrow{AB}$

ce point Π est le barycentre de $(A, 1-\lambda)$ et (B, λ)

. notamment si $\Pi \in [AB]$ alors $\lambda \in [0,1]$ et $1-\lambda \in [0,1]$

Important

Conséquence (bilan)

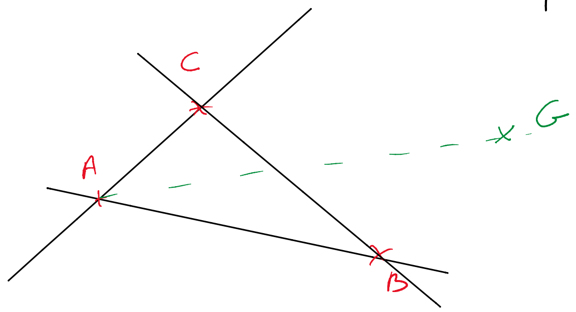
$\to$ l'ensemble des barycentres de A et B est la droite (AB)

$\to$ ——————— à poids positifs de A et B est le segment $[AB]$

* avec A, B, C non alignés (i.e. $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires)

même principe : $\underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{m}\vec{\Pi G} = \alpha\vec{\Pi A} + \beta\vec{\Pi B} + \gamma\vec{\Pi C}$ $\quad (\alpha+\beta+\gamma \neq 0)$

donne $\quad m\,\vec{AG} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$



. on montre de même que l'ensemble des barycentres de A, B et C est le plan contenant ces 3 points

. l'ensemble des barycentres à poids positifs de A, B et C est "l'intérieur" du triangle ABC

3/ Propriétés du barycentre $\left(m = \sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0\right)$

Notation : le barycentre d'un ensemble de points pondérés $((A_i, m_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ sera noté

$$G = \text{bar}\left((A_i, m_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right) = \text{bar}\left((A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)\right)$$

commutativité : le barycentre de $((A_i, m_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ ne dépend pas de l'ordre

homogénéité : si $k \neq 0$ alors le barycentre de $\left((A_i, km_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$ est le même que celui de $((A_i, m_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$

remarque : puisque $m \neq 0$, on peut notamment choisir $m_i' = \dfrac{m_i}{m}$

on a alors $\sum_{i=1}^{n} m_i' = 1$ afin d'avoir $\text{bar}\left((A_i, m_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right) = \text{bar}\left((A_i, m_i')_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$

associativité (relation importante)

. si I_1 et I_2 sont deux sous ensembles disjoints de $[\![1,n]\!]$ avec $I_1 \cup I_2 = [\![1,n]\!]$

((I_1, I_2) forme une partition de $[\![1,n]\!]$)

. si $\begin{cases} \sum_{i\in I_1} m_i = \Pi_1 \neq 0 \\ \sum_{i\in I_2} m_i = \Pi_2 \neq 0 \end{cases}$ (et toujours $m = \sum_{i=1}^{n} m_i \neq 0$)

on note $\begin{cases} G_1 = \text{bar}\left((A_i, m_i)_{i\in I_1}\right) \\ G_2 = \text{bar}\left((A_i, m_i)_{i\in I_2}\right) \end{cases}$

alors G le barycentre de $((A_i, m_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$

est le barycentre de $\left((G_1, \Pi_1), (G_2, \Pi_2)\right)$

dem : on note $G' = \text{bar}\left((G_1, \Pi_1), (G_2, \Pi_2)\right)$

pour tout $\Pi \in E$, $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\Pi A_i} = \sum_{i\in I_1} m_i \vec{\Pi A_i} + \sum_{i\in I_2} m_i \vec{\Pi A_i}$ déf de G_1 et G_2

pour tout $M \in E$, $\underbrace{\sum_{i=1} m_i \overrightarrow{MA_i}}$ $=$ $\underbrace{\sum_{i\in I_1} m_i \overrightarrow{MA_i}}$ $+$ $\underbrace{\sum_{i\in I_2} m_i \overrightarrow{MA_i}}$) ass de G_1 et G_2

$$m\,\overrightarrow{MG} = M_1 \,.\, \overrightarrow{MG_1} + M_2\, \overrightarrow{MG_2}$$) def de G'

$$m\,\overrightarrow{MG} = \underbrace{(M_1+M_2)}_{m}\, \overrightarrow{MG'}$$

donc pour tout $M \in E$, $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG'}$ et $G = G'$

4/ Exemples

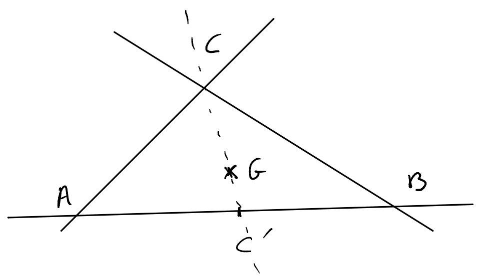
a/ Isobarycentre de (A,B,C)

soit A, B, C trois points distincts et G le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$

par associativité

G est le barycentre de $(C',2)$ et $(C,1)$ où C' est le barycentre de $(A,1), (B,1)$

donc le milieu de $[AB]$



(notamment $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$)

donc G est sur la médiane issue de C

de même en échangeant les points. les 3 médianes se rencontrent en G.

b/ Ensembles de points ($\mathcal{P}$: plan affine euclidien usuel)

. on se donne $A \neq B$ $(a = AB)$ et on cherche $\{M \in \mathcal{P} \,/\, 2AM^2 + 3BM^2 = k a^2\}$

. soit G quelconque, on a $AM^2 = \overrightarrow{AM}^2$

$$= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM})^2 = AG^2 + 2\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{GM} + GM^2$$

d'où $2AM^2 + 3BM^2 = 2AG^2 + 3BG^2 + 5GM^2 + 2\times(\underbrace{2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG}})\,.\,\overrightarrow{GM}$

si on prend $G = \text{bar}((A,2),(B,3))$ $\longrightarrow \vec{0}$

alors $2AM^2 + 3BM^2 = 2AG^2 + 3BG^2 + 5GM^2$

. on détermine les valeurs de AG^2 et BG^2

on a $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$ d'où $3\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

ainsi que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$

. on obtient $2AM^2 + 3BM^2 = 5GM^2 + \frac{18}{25}a^2 + \frac{12}{25}a^2 = 5GM^2 + \frac{6}{5}a^2$

l'équation devient $GM^2 = \frac{1}{5}\left(k - \frac{6}{5}\right)a^2$

ce qui donne $\emptyset$ si $k < \frac{6}{5}$, $\{G\}$ si $k = \frac{6}{5}$, un cercle de centre G si $k > \frac{6}{5}$

Remarque finale dans un $\mathbb{R}$ev :

si $(a_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un ensemble de points pondérés $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m \neq 0\right)$

alors le barycentre g vérifie $mg = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$

d'où $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' a_i$ avec $\alpha_i' = \frac{\alpha_i}{m}$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' = 1$

dans la partie suivante, on va s'intéresser aux combinaisons de cette forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ avec $\alpha_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ (pour avoir un barycentre)

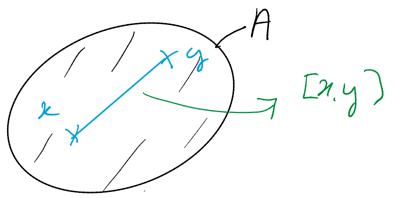
II Convexes

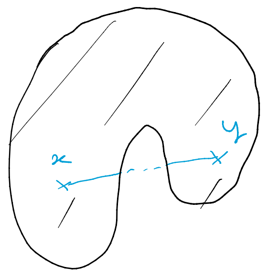
On revient à une situation générale : un $\mathbb{R}$espace vectoriel E quelconque
On étudie la notion de convexité et ses propriétés basiques

1°/ Définitions

Convexe : soit E un $\mathbb{R}$ev. On dit que $A \subset E$ est convexe lorsque $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in E$

rem : on note $[x,y]$ le "segment xy" comme étant $\{\lambda x + (1-\lambda) y, \ \lambda \in [0,1]\}$

convexe : 

pas convexe : 

exemples . $\emptyset$ et E sont convexes
. dans $\mathbb{R}$ les convexes sont exactement les intervalles

Combinaison linéaire convexe : soit $A \subset E$. On appelle combinaison linéaire convexe d'éléments de A tout vecteur qui s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \quad \text{où} \quad \begin{cases} . \ n \in \mathbb{N}^* \\ . \ \forall i \in [\![1,n]\!] \ a_i \in A \\ . \ \forall i \in [\![1,n]\!], \ \alpha_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \end{cases}$$

(c'est-à-dire que x est un barycentre à poids positifs d'éléments de A)

Remarque importante : une combinaison linéaire convexe de 2 vecteurs s'écrit
$\alpha x + \beta y$ avec $\alpha, \beta \geq 0$ et $\alpha + \beta = 1$ d'où $\beta = 1 - \alpha$
avec $\alpha \geq 0$ et $\beta = 1 - \alpha \geq 0$
donc $\alpha \in [0,1]$
donc sous la forme $\lambda x + (1-\lambda) y$ avec $\lambda \in [0,1]$

donc sous la forme $\lambda x + (1-\lambda) y$ avec $\lambda \in [0,1]$

2°/ Propriétés

a/ Caractérisation :

$\boxed{A \text{ est convexe} \iff \text{toute combinaison linéaire convexe d'éléments de } A \text{ est encore dans } A}$

demo : * on a déjà $\Leftarrow$ car si $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda y)$ est une combinaison linéaire convexe de A

* $\Rightarrow$ par récurrence sur le nombre n de termes

$\mathcal{P}(n)$: " si $a_1, \dots, a_n \in A$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in A$ "

* $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vérifiées (pour $n=2$, c'est la déf. de la convexité)

* soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$, $\alpha_1 \dots \alpha_{n+1} \geq 0$ avec $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$

on a

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) + \underbrace{\alpha_{n+1}}_{\in[0,1]} \underbrace{a_{n+1}}_{\in A}$$

$\nearrow$ pas une c.l. convexe car $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 - \alpha_{n+1} \neq 1$ en général

. si $\alpha_{n+1} = 1$: rien à faire, les autres α_i sont nuls et $x = a_{n+1} \in A$

. sinon on écrit $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = (1-\alpha_{n+1}) \times \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}}}_{\alpha_i'} a_i$

or $\alpha_i' \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i' = \frac{1}{1-\alpha_{n+1}} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) = 1$

donc $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i' a_i$ est une c.l. convexe de A à n vecteurs donc $y \in A$ par $\mathcal{P}(n)$

on a finalement $x = \alpha_{n+1} a_{n+1} + (1-\alpha_{n+1}) y$ et $\alpha_{n+1} \in [0,1]$ ($\in A$)

donc $x \in A$.

finalement $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ si $n \geq 2$

rem : cela revient à dire qu'une partie convexe est une partie stable pour les barycentres à poids positifs.

b/ Intersection de convexes

prop : si $\mathcal{F}$ est une famille de convexes alors $C = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ est convexe.

démo : . soit $x, y \in C$ et $\lambda \in [0,1]$ et $z = \lambda x + (1-\lambda) y$
. $\forall A \in \mathcal{F}$, x et y sont dans A convexe donc $z \in A$) $\Rightarrow z \in C$

c) Enveloppe convexe (hors programme)

On veut définir la notion de "plus petit convexe qui contient $B \subset E$"
La stabilité par intersection permet de le faire de façon usuelle :

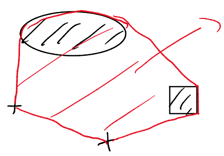
Def : si $B \subset E$ alors on note $\mathrm{Conv}(B) = \bigcap_{\substack{A \text{ convexe} \\ B \subset A}} A$

remarques : * cette définition a bien un sens car $\mathcal{F} = \{A \text{ convexe}, B \subset A\}$ n'est pas vide car il contient E

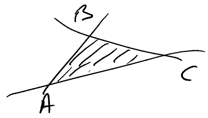
* $\mathrm{Conv}(B)$ est un convexe (prop. précédente) qui contient B

* si $\tilde{A}$ est un convexe qui contient B alors $\tilde{A} \in \mathcal{F}$
donc $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \subset \tilde{A}$ donc $\mathrm{Conv}(B) \subset \tilde{A}$ (c'est le plus petit)

exemples

* 

* pour 3 points A, B, C distincts on obtient l'intérieur du triangle



Prop : si $B \subset E$
alors $\mathrm{Conv}(B)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires convexes d'éléments de B.

dem : on note $\tilde{B}$ l'ensemble des c.l. convexes d'éléments de B

$\mathrm{Conv}(B) \subset \tilde{B}$:
→ $\tilde{B}$ contient B
→ on vérifie que $\tilde{B}$ est convexe
(si $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ et $y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j$ et $\lambda \in [0,1]$,
on vérifie que $\lambda x + (1-\lambda) y$ est encore une c.l. convexe de B donc dans $\tilde{B}$)

$\tilde{B} \subset \mathrm{Conv}(B)$:
→ si $x \in \tilde{B}$, $\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$ / $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$
$b_1, \dots b_n \in B$
or $b_i \in \mathrm{Conv}(B)$ qui est convexe donc $x \in \mathrm{Conv}(B)$