Réduction des endomorphismes

1/ Sous-espaces stables :
- Définition, propriétés (si u et v commutent alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$, $E_\lambda(u)$ stables par v)
- Endomorphisme induit.
- Caractérisation matricielle (stabilité d'un sev, d'une famille de sev, cas des matrices triangulaires supérieures).

2/ Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice
- Éléments propres. Caractérisation des valeurs propres en dimension finie par le déterminant de $f-\lambda id$.
- Propriétés sous-espaces propres : stables, endomorphisme induit, somme directe des sous-espaces propres.
- Cas des matrices. Cas de la transposée, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\bar{\lambda}}(A)$ si $A \in M_n(\mathbb{R})$.
- Polynôme caractéristique (maintenant c'est $\det(\lambda \mathrm{Id} - f)$), écriture, ordre de multiplicité d'une valeur propre.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit sur un sev stable. Inégalité $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant n_\lambda$.

3/ Réduction (dimension finie)
- f est diagonalisable lorsqu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Propriétés équivalentes (E est somme des espaces propres, base de vecteurs propres, somme des dimensions des espaces propres). Cas des matrices.
- CNS : polynôme caractéristique scindé et $\dim E_\lambda = n_\lambda$. Cas particuliers (cas χ_f scindé à racines simples, cas d'une seule racine).
- Trigonalisation - un endomorphisme f est trigonalisable si et seulement χ_f est scindé.
- Applications (puissances, suites récurrentes, commutant).

Questions de cours

1/ Définition, écriture et propriétés du polynôme caractéristique.

2/ Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. La dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la racine dans le polynôme caractéristique.

3/ Définitions équivalentes de « f est diagonalisable ».

4/ CNS de diagonalisabilité par le polynôme caractéristique.

5/ f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé.

6/ Description du commutant $C(f)$ lorsque f est diagonalisable. Dimension de $C(f)$.

Ce qui n'est pas au programme

Tout ce qui concerne les polynômes d'endomorphismes (polynômes annulateurs, th. de décomposition des noyaux, critères de diagonalisabilité avec des polynômes annulateurs, polynôme minimal...).

Semaine prochaine : suites de fonctions, convergence dominée