Espaces vectoriels normés

Généralités, suites

- Définitions et propriétés des normes (exemples sur $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, sur $\mathbb{K}[X]$ et $M_n(\mathbb{K})$).
- Distance associée à une norme, distance à une partie (elle est 1-lipschitzienne).
- Boules ouvertes et fermées, parties bornées, applications bornées, applications lipschitziennes.
- Normes équivalentes. En dimension finie les normes sont équivalentes (admis pour le moment).
- Convergence et divergence des suites, propriétés des limites. Limites par coordonnées en dimension finie.
- Lien normes équivalentes et convergence des suites.
- Suites extraites et valeurs d'adhérences.
- Rappels sur les suites de réels (propriétés liées à la relation d'ordre, suites définies par une relation de récurrence, exemples de suites définies implicitement).

Topologie

- Ouverts et propriétés, points intérieurs, intérieur d'une partie.
- Fermés et propriétés, points adhérents, adhérence d'une partie, caractérisation par les suites, partie dense et frontière.
- Intérieur et adhérence d'un sous-espace vectoriel.
- Compacts : on peut extraire une suite convergente dans l'ensemble. Produit fini de compacts. Une partie compacte est fermée et bornée, on a la réciproque en dimension finie. Une partie d'un compact est compacte ssi elle est fermée. Une suite d'un compact ne possédant qu'une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.

Étude locale

- limites, continuité en un point, sur A. Propriétés algébriques, composition. Cas où l'espace d'arrivée est de dimension finie.
- Caractérisation par les suites, par les voisinages. Les applications linéaires sur un espace de dimension finie sont lipschitziennes donc continues.

Questions de cours

1/ Définition d'un point intérieur, de l'intérieur d'une partie. Montrer que $\mathring{A}$ est un ouvert.

2/ Définition d'un point adhérent (avec les boules), de l'adhérence d'une partie. Caractérisation d'un point adhérent par les suites.

3/ Définition d'un compact et propriétés : ils sont fermés, bornés et une partie d'un compact l'est encore si et seulement si elle est fermée.

4/ Dans un compact une suite ne possédant qu'une valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.

5/ Topologie des sous-espaces vectoriels : si F sev de E alors $\bar{F}$ aussi. Si F n'est pas d'intérieur vide alors $F = E$.

6/ Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors F est fermé.