# Espaces vectoriels normés

## Généralités, suites

- Définitions et propriétés des normes (exemples sur $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, sur $\mathbb{K}[X]$ et $M_n(\mathbb{K})$).
- Distance associée à une norme, distance à une partie (elle est 1-lipschitzienne).
- Boules ouvertes et fermées, parties bornées, applications bornées, applications lipschitziennes.
- Normes équivalentes. En dimension finie les normes sont équivalentes (admis pour le moment).
- Convergence et divergence des suites, propriétés des limites. Limites par coordonnées en dimension finie.
- Lien normes équivalentes et convergence des suites.
- Suites extraites et valeurs d'adhérences.
- Rappels sur les suites de réels (propriétés liées à la relation d'ordre, suites définies par une relation de récurrence, exemples de suites définies implicitement).

# Questions de cours

1/ Définition d'une norme. Montrer que la norme associée à un produit scalaire est bien une norme.

2/ Distance à une partie. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

3/ Espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées sur $X$ à valeurs dans une evn $(E, \|\cdot\|)$ et norme infinie sur cet espace vectoriel

4/ Normes 1, 2 et $\infty$ sur $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Comparaison de ces normes.

5/ La norme $N_2$ est dominée par $N_1$ si et seulement si toute suite de limite nulle pour $N_1$ est une suite de limite nulle pour $N_2$.