Séries numériques

- définitions, propriétés générales, séries télescopiques, lien suites-séries.
- Séries à termes positifs :
  - critères de comparaison (majoration, domination, équivalent)
  - séries géométriques, séries de Riemann, règles de Riemann. Séries de Bertrand (hors programme mais pas tout à fait, enfin non... à savoir refaire et manipuler).
  - Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert.
  - Comparaison série-intégrale : si f est continue (par morceaux), décroisssante et positive (ou minorée) sur $[n_0, +\infty[$ alors $\sum \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)\right)$ et/ou $\sum \left(f(n) - \int_{n}^{n+1} f(t)\,dt\right)$ convergent - notamment la série converge ssi f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$. Diverses utilisations pour trouver des encadrements/équivalents de sommes partielles, de restes (notamment pour les séries de Riemann). Cas où f est croissante.
  - Série harmonique : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ à savoir retrouver rapidement avec une comparaison série-intégrale ou par la série téléscopique associée.
- Sommation des relations de comparaison (o, O, ~ entre deux séries dont la seconde est à termes positifs) pour les sommes partielles/restes. Utilisations pour déterminer des développements asymptotiques de suites.
- Séries quelconques : absolue convergence, théorème des séries alternées (avec majoration et signe du reste). Développement asymptotique du terme général.
- Produit de Cauchy (démo dans le cas positif uniquement) et exponentielle complexe.

Convexité, fonctions convexes

- Quelques notions sur les barycentres et propriétés, barycentres à coefficients positifs. Partie convexe d'un espace vectoriel.
- Fonctions convexes sur un intervalle de $\mathbb{R}$: définition. Caractérisations avec l'inégalité des 3 pentes, la croissante de la fonction pente en un point.
- Régularité : continuité, dérivabilité à droite/gauche sur l'intérieur. Croissances des dérivées droite et gauche
- Caractérisation lorsque f est dérivable, lorsque f est de classe $\mathscr{C}^2$.
- position rapport à une droite passant par 2 points, position par rapport à une tangente lorsque f est $\mathscr{C}^1$.
- Inégalités de convexité.

Questions de cours

1/ Convergence de $\sum \left(f(n) - \int_{n}^{n+1} f(t)\,dt\right)$ lorsque f est décroissante minorée. Application : détermination d'un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha < 1$.

2/ Théorème des séries alternées. Majoration et signe du reste.

3/ Démonstration de la sommation des o : cas d'une comparaison à une série convergente.

4/ Démonstration de la sommation des o : cas d'une comparaison à une série divergente.

5/ Équivalence entre la convexité, les inégalités des 3 pentes et la croissance des « fonctions pentes ».

6/ Si f est convexe, dérivable, la courbe est au dessus de ses tangentes.

7/ Si f convexe, démonstration de $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$ (avec les bonnes hypothèses).