Séries numériques

- définitions, propriétés générales, séries télescopiques, lien suites-séries.
- Séries à termes positifs :
  - critères de comparaison (majoration, domination, équivalent)
  - séries géométriques, séries de Riemann, règles de Riemann. Séries de Bertrand (hors programme mais pas tout à fait, enfin non... à savoir refaire et manipuler).
  - Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert.
  - Comparaison série-intégrale : si f est continue (par morceaux), décroisssante et positive (ou minorée) sur $[n_0,+\infty[$ alors $\sum\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)\right)$ et/ou $\sum\left(f(n)-\int_{n}^{n+1} f(t)\,dt\right)$ convergent - notamment la série converge ssi f est intégrable sur $[n_0,+\infty[$. Diverses utilisations pour trouver des encadrements/équivalents de sommes partielles, de restes (notamment pour les séries de Riemann). Cas où f est croissante.
  - Série harmonique : $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ à savoir retrouver rapidement avec une comparaison série-intégrale ou par la série téléscopique associée.
- Séries quelconques : absolue convergence, théorème des séries alternées (avec majoration et signe du reste). Développement asymptotique du terme général.
- Produit de Cauchy (démo dans le cas positif uniquement) et exponentielle complexe.

Questions de cours

1/ Comparaison à une série géométrique et règle de d'Alembert.

2/ Démonstration de $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3/ Convergence de $\sum\left(f(n)-\int_{n}^{n+1} f(t)\,dt\right)$ lorsque f est décroissante minorée. Application : détermination d'un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha < 1$.

4/ Théorème des séries alternées. Majoration et signe du reste.

5/ Produit de Cauchy. Démonstration du cas positif. Relation $\exp(z+z') = \exp(z).\exp(z')$.