Révisions d'algèbre linéaire

1/ Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels :

- Opérations (intersection, produit), espace engendré par une partie A.
- Sommes et sommes directes de 2 et plusieurs sous-espaces, espaces supplémentaires (2 et plus). Pour plusieurs sous-espaces, la définition donnée est celle avec l'unicité de la décomposition des vecteurs - équivalence avec l'unique décomposition de 0, avec F_i intersecté avec la somme de tous les autres, ou seulement avec la somme des précédents, est nulle.
- Familles libres, génératrices, liées - techniques d'indépendance linéaire. Cas particuliers : familles de polynômes de degré deux à deux distincts. Bases.

2/ Espaces de dimension finie :

- définition, existence de la dimension.
- théorèmes de la base incomplète.
- dimension de sommes, sommes directes, $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si $\dim \sum_{i=1}^{p} E_i = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$.
- base adaptée à une décomposition.

3/ Applications linéaires :

- Définitions $\mathscr{L}(E,F), \mathscr{L}(E), GL(E)$ et structures.
- Images directes et réciproques de parties.
- Image et noyau, caractérisation de l'injectivité, surjectivité. Image de familles libres, génératrices et de bases par des applications linéaires (+injective ou surjective ou bijective).
- Tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image et formule du rang. Caractérisation de la bijectivité pour un endomorphisme en dimension finie (injectif ou surjectif).
- Projecteurs et projections.
- Propriétés du rang, rang d'une composée, invariance par composition par un automorphisme
- Détermination d'une application linéaire : si $E = \oplus E_i$ et $f_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$ alors il existe une unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec $f_{|E_i} = f_i$. Détermination par l'image d'une base.

Questions de cours

1/ différentes caractérisations de la somme directe de n sous-espaces vectoriels

2/ $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

3/ $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe

4/ isomorphisme du rang, formule du rang

5/ étude d'un projecteur : reconstruction de la projection à partir de $p \circ p = p$

6/ noyaux itérés : croissance de la suite des $\ker f^k$ et arrêt dès que deux noyaux consécutifs sont égaux.

7/ propriété du rang : invariance du rang par une composition à droite ou à gauche par un automorphisme, $\mathrm{rg}\,(u \circ v)$